UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2015-2016

Prova scritta del 15-7-2016

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - 2X_3 - kX_4 = 0 \\ kX_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 1 \\ kX_1 - X_2 + X_3 = 1 \\ 2X_1 - X_2 - 2X_3 + (1-k)X_4 = 2. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Siano k un numero reale, $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X + 2Y - Z = 0 \\ Z + X = 0 \end{cases}$$

e $U_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$U_k = < (1,1,0,2),\ (-1,0,-1,1),\ (k,3,-1,7) > .$$

(a) Determinare una base di W ed una di U_k.

(b) Determinare le dimensioni di $U_k + W$ e di $U_k \cap W$.

(c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$< (-1,1,1,1), v > \subseteq U_k \cap W.$$

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano p_k il piano passante per $Q(0,0,1,0)$ e parallelo a $v_1 = e_1 + ke_2, v_2 = e_2 + e_4$ e T_k il sottospazio con le seguenti equazioni:

$$T_k : \begin{cases} X - Y + W = 0 \\ X + Y + Z = 0 \\ kZ - kW = k \end{cases} .$$

(a) Determinare i valori di k per i quali T_k e $p_k \cap T_k$ sono sottospazi affini di A. Calcolare la dimensione di T_k.
(b) Determinare per quali valori di k, se esistono, p_k è parallelo a T_k.
(c) Determinare (se esistono) per quali valori di k esiste una retta s in A tale che s è parallela a p_k e $s \subseteq T_k$.
4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $v = (0, -1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$v \in N(F), F(E_1) = E_1 + v, F(E_1 + E_4) = E_1 + kE_3, F(E_2 - E_3) = 3E_2 - 2E_4 + (1 - k)E_1$$

dove E_1, E_2, E_3, E_4 è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.
(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.