UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2015-2016

Prova scritta del 16-6-2016

TESTO E SOLUZIONI

A. Per il recupero del primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il recupero del secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ kx_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - kx_3 = -1 \\ x_2 + kx_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE COME RECUPERO DEL I ESONERO:

(ovviamente valida anche come scritto)

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_3 \to R_3 - 2R_1$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -k & 2 & -3 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_4 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -k & 2 & -3 \\ 0 & k & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_3 \to R_3 - 2R_2, R_4 \to R_4 - kR_2$ danno

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3k & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 1-k & -k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 - \frac{k}{3}R_3$, si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3k & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1-k & \frac{2}{3}k \end{pmatrix}$$

e scambiando R_3 con R_4 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-k & \frac{2}{3}k \\ 0 & 0 & -3k & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 + 3kR_3$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-k & \frac{2}{3}k \\ 0 & 0 & 0 & 3k(1-k) & -5+2k^2 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 0, 1$ il sistema è a gradini e quindi compatibile, mentre se $k = 0, 1$ si ha che $-5 + 2k^2 \neq 0$ ed il sistema è incompatibile.

Dunque si vede subito che il sistema è compatibile se e solo se $k \neq 0, 1$.

In tal caso le soluzioni sono

$$X_4 = \frac{2k^2 - 5}{3k(1-k)},\ X_3 = \frac{5}{3k},\ X_2 = \frac{-2k+5}{3k(1-k)},\ X_1 = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

SOLUZIONE COME SCRITTO:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det(A) = 3k(1-k)$, pertanto, se $k \neq 0, 1$, abbiamo $r(A) = r(A\ b) = 4$ e il sistema è compatibile. Invece se $k = 0$ abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

e se $k = 1$ abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Quindi, in entrambi i casi, $r(A\ b) = 4 > r(A)$ ed il sistema è incompatibile.
Pertanto il sistema è compatibile se e solo se $k \neq 0, 1$. In tal caso le soluzioni sono date dalla regola di Cramer

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -k & 0 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{3k(1-k)} = \frac{1}{3},\ X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{3k(1-k)} = \frac{-2k+5}{3k(1-k)},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & k & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3k(1-k)} = \frac{5}{3k},\ X_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -k & -1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{3k(1-k)} = \frac{-2k+5}{3k(1-k)}. \blacksquare$$

2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Siano $U_k =< A_1, A_2, A_3, A_4 >$ e $W_k =< B, C >$ i sottospazi generati.
(a) Determinare le dimensioni di U_k, W_k e scrivere esplicitamente una base di ciascun sottospazio.
(b) Determinare la dimensione di $U_k \cap W_k$ e per quali k si ha che $W_k \subseteq U_k$.
(c) Determinare se esiste un sottospazio V di $M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$U_k \oplus V = W_k \oplus V = M_2(\mathbb{R}).$$

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE COME RECUPERO DEL I ESONERO:

Nel seguito utilizzeremo l'isomorfismo $M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$.

(a) Per calcolare la dimensione di U_k facciamo operazioni elementari sulla matrice dei generatori

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -k \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_2 si trova

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 + \frac{1}{2}R_1$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1-k \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_2 + R_3$ da

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1-k \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_4 \to R_4 - \frac{3}{2}R_3$ abbiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}-k \end{pmatrix}$$

Pertanto $\dim U_k = r(A) = \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq \frac{5}{2} \\ 3 & \text{se } k = \frac{5}{2} \end{cases}$ ed una sua base è $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ se $k \neq \frac{5}{2}$ e $\{A_2, A_1, A_3'\}$ se $k = \frac{5}{2}$ dove $A_3' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. In particolare osserviamo che, se $k \neq \frac{5}{2}$, allora $U_k = M_2(\mathbb{R})$.

Per calcolare la dimensione di W_k facciamo operazioni elementari su

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_2 \to R_2 - R_1$ si trova la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che $\dim W_k = r(D) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 2 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$ ed una sua base è $\{B\}$ se $k = 0$ e $\{B, C\}$ se $k \neq 0$.

(b) Se $k \neq \frac{5}{2}$, essendo $U_k = M_2(\mathbb{R})$, si ha ovviamente che $U_k \cap W_k = W_k$, la cui dimensione abbiamo già calcolato, e $W_k \subseteq U_k$.

Ora supponiamo $k = \frac{5}{2}$. Consideriamo la matrice che ha per righe i generatori di $U_{\frac{5}{2}}$ e $W_{\frac{5}{2}}$, cioè (usando D)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

e facciamo operazioni elementari. Con le operazioni $R_4 \to R_4 - \frac{1}{2}R_1, R_5 \to \frac{2}{5}R_5$ si trova

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_4 \to R_4 - \frac{5}{2}R_2, R_5 \to R_5 + R_2$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 + \frac{1}{2}R_3$ da la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 4. Quindi $\dim(U_{\frac{5}{2}} + W_{\frac{5}{2}}) = 4$ e

$$\dim(U_{\frac{5}{2}} \cap W_{\frac{5}{2}}) = \dim(U_{\frac{5}{2}}) + \dim(W_{\frac{5}{2}}) - \dim(U_{\frac{5}{2}} + W_{\frac{5}{2}}) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

Ma allora $W_{\frac{5}{2}} \not\subseteq U_{\frac{5}{2}}$.
Si conclude che $W_k \subseteq U_k$ se e solo se $k \neq \frac{5}{2}$.
(c) Se esiste un sottospazio V di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $U_k \oplus V = W_k \oplus V = M_2(\mathbb{R})$, allora $\dim V = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim U_k = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim W_k$ e quindi $\dim U_k = \dim W_k$. Ma questo, per quanto visto in (a), non accade mai.
Si conclude che V non esiste per nessun k. ■

SOLUZIONE COME SCRITTO:

Nel seguito utilizzeremo l'isomorfismo $M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$.
(a) Si ha $\dim U_k = r(A)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -k \end{pmatrix}.$$

Ora

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -k \end{vmatrix} = 2k - 5$$

mentre

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

quindi $\dim U_k = r(A) = \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq \frac{5}{2} \\ 3 & \text{se } k = \frac{5}{2} \end{cases}$ ed una sua base è $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ se $k \neq \frac{5}{2}$ e $\{A_1, A_2, A_3\}$ se $k = \frac{5}{2}$. In particolare osserviamo che, se $k \neq \frac{5}{2}$, allora $U_k = M_2(\mathbb{R})$.
Analogamente $\dim W_k = r(D)$, dove $D = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$. Utilizziamo il principio dei minori orlati ed orliamo il minore $|1| = 1$. Si ha $\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -k$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k$ e pertanto $\dim W_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 2 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$ ed una sua base è $\{B\}$ se $k = 0$ e $\{B, C\}$ se $k \neq 0$.
(b) Se $k \neq \frac{5}{2}$, essendo $U_k = M_2(\mathbb{R})$, si ha ovviamente che $U_k \cap W_k = W_k$, la cui dimensione abbiamo già calcolato, e $W_k \subseteq U_k$.

Ora supponiamo $k = \frac{5}{2}$. Consideriamo la matrice che ha per righe i generatori di $U_{\frac{5}{2}}$ e $W_{\frac{5}{2}}$, cioè

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

e quindi $\dim(U_{\frac{5}{2}} + W_{\frac{5}{2}}) = r(E) = 4$ e

$$\dim(U_{\frac{5}{2}} \cap W_{\frac{5}{2}}) = \dim(U_{\frac{5}{2}}) + \dim(W_{\frac{5}{2}}) - \dim(U_{\frac{5}{2}} + W_{\frac{5}{2}}) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

Ma allora $W_{\frac{5}{2}} \not\subseteq U_{\frac{5}{2}}$.
Si conclude che $W_k \subseteq U_k$ se e solo se $k \neq \frac{5}{2}$.
(c) Se esiste un sottospazio V di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $U_k \oplus V = W_k \oplus V = M_2(\mathbb{R})$, allora $\dim V = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim U_k = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim W_k$ e quindi $\dim U_k = \dim W_k$. Ma questo, per quanto visto in (a), non accade mai.
Si conclude che V non esiste per nessun k. ∎

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & k \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) prodotto di matrici elementari e, in tal caso, esprimere A come tale prodotto.
(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -k \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per quali k esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma, simultaneamente, A e B in I_3?

SOLUZIONE:

(a) Facciamo operazioni elementari su A. Con l'operazione $R_2 \to R_2 + R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix}$$

da cui, on l'operazione $R_3 \to R_3 + R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 2k-1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto se $2k - 1 = 0$, ovvero se $k = \frac{1}{2}$, si ha che $r(A) = 2$ e quindi A non è prodotto di matrici elementari.
Assumiamo quindi $k \neq \frac{1}{2}$ e continuiamo.
Con l'operazione $R_3 \to \frac{1}{2k-1}R_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to R_2 - (k-1)R_3$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to R_1 + R_3$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_1 \to R_1 - R_2$, si ottiene I_3.
Pertanto A è prodotto di matrici elementari se e solo se $k \neq \frac{1}{2}$.
Dato che ogni operazione elementare equivale alla moltiplicazione a sinistra per la corrispondente matrice elementare, risalendo alle operazioni fatte, abbiamo allora che

$$R_{12}(-1)R_{13}(1)R_{23}(-k+1)R_3(\frac{1}{2k-1})R_{32}(1)R_{21}(1)A = I_3$$

da cui

$$A = R_{21}(1)^{-1}R_{32}(1)^{-1}R_3(\frac{1}{2k-1})^{-1}R_{23}(-k+1)^{-1}R_{13}(1)^{-1}R_{12}(-1)^{-1}$$

e quindi

$$A = R_{21}(-1)R_{32}(-1)R_3(2k-1)R_{23}(k-1)R_{13}(-1)R_{12}(1). \quad \blacksquare$$

(b) Supponiamo che esista una sequenza di operazioni elementari che trasforma, simultaneamente, A e B in I_3. Allora, tenendo conto che ogni operazione elementare equivale

alla moltiplicazione a sinistra per la corrispondente matrice elementare, esiste una matrice R, prodotto di matrici elementari, tale che $RA = I_3$ e $RB = I_3$. Ma allora $k \neq \frac{1}{2}, R = A^{-1}$ e $R = B^{-1}$, da cui $A^{-1} = B^{-1}$. Ma allora $A = B$, contraddizione.
Pertanto per nessun k esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma, simultaneamente, A e B in I_3. ∎

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Siano $v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,1,0,-1) \in \mathbb{R}^4$, sia $U =< v_1, v_2 >$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = id_U, F(v_1 + E_1) = E_1 - E_2 + kE_4, F(E_2) = E_1 + kE_2$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.
(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{v_1, v_2, v_1 + E_1, E_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Per ipotesi sappiamo che

$$F(v_1) = v_1 \text{ e } F(v_2) = v_2.$$

Per determinare la matrice associata ad F in tale base esprimiamo $F(v_1 + E_1) = E_1 - E_2 + kE_4, F(E_2) = E_1 + kE_2$ nella base e. Si ha

$$av_1+bv_2+c(v_1+E_1)+dE_2 = (a+b+2c)E_1+(a+b+c+d)E_2+(a+c)E_3+(a-b+c)E_4 = E_1-E_2+kE_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} a + b + 2c = 1 \\ a + b + c + d = -1 \\ a + c = 0 \\ a - b + c = k \end{cases}$$

che ha soluzione $a = -1 - k, b = -k, c = 1 + k, d = -1 + k$. Pertanto

$$F(v_1 + E_1) = (-1 - k)v_1 - kv_2 + (1 + k)(v_1 + E_1) + (-1 + k)E_2.$$

Analogamente

$$av_1+bv_2+c(v_1+E_1)+dE_2 = (a+b+2c)E_1+(a+b+c+d)E_2+(a+c)E_3+(a-b+c)E_4 = E_1+kE_2$$

se e solo se

$$\begin{cases} a+b+2c=1 \\ a+b+c+d=k \\ a+c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases}$$

che ha soluzione $a=-1, b=0, c=1, d=k$. Pertanto

$$F(E_2) = -1v_1 + 0v_2 + 1(v_1+E_1) + kE_2.$$

Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1-k & -1 \\ 0 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1+k & 1 \\ 0 & 0 & -1+k & k \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di F è (sviluppando prima per la prima colonna e poi ancora per la prima colonna)

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & -1-k & -1 \\ 0 & 1-T & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1+k-T & 1 \\ 0 & 0 & -1+k & k-T \end{vmatrix} = (T-1)^2[(1+k-T)(k-T)+1-k] =$$

$$= (T-1)^2(T^2-(1+2k)T+1+k^2).$$

Le radici di $(T-1)^2(T^2-(1+2k)T+1+k^2)=0$ sono 1 e, se $k \geq \frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}(1+2k \pm \sqrt{4k-3})$.
Osserviamo che, per $k \geq \frac{3}{4}$, si ha $\frac{1}{2}(1+2k \pm \sqrt{4k-3}) = 1$ se e solo se $k=1$.
Quindi gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k < \frac{3}{4}$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 2)
$k = \frac{3}{4}$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = \frac{5}{4}$ (m.a. 2)
$k > \frac{3}{4}, k \neq 1$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 2), $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1+2k-\sqrt{4k-3})$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{1}{2}(1+2k+\sqrt{4k-3})$ (m.a. 1)
$k = 1$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 3), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 1)

(b) Dato che la molteplicità geometrica è sempre almeno 1 e non può superare la molteplicità algebrica, ne segue che le dimensioni degli autospazi di F saranno 1 in tutti i casi nella tabella sopra nei quali la molteplicità algebrica è 1. Vediamo i casi restanti.

Se $k = \frac{3}{4}$, posto $T = \frac{5}{4}$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) - \frac{5}{4} I_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{7}{4} & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, da cui $\dim V_{\frac{5}{4}}(F) = 4 - 3 = 1$.
Ora prendiamo $\lambda_1 = 1$ come autovalore da considerare e calcoliamo la base di $V_1(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 1 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} (-1-k)z - w = 0 \\ -kz = 0 \\ kz + w = 0 \\ (-1+k)z + (k-1)w = 0 \end{cases}$$

che si vede facilmente avere soluzioni $z = w = 0$ per ogni k. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 1 sono tutti del tipo $xv_1 + yv_2$ e una base di $V_1(F)$ è $\{v_1, v_2\}$ per ogni k.
(c) Per la diagonalizzabilità di F abbiamo i seguenti casi:

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

1) $k < \frac{3}{4}$

autovalore	m.g.	m.a.
1	2	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 2 e quindi F non è diagonalizzabile.
2) $k = \frac{3}{4}$

autovalore	m.g.	m.a.
1	2	2
$\frac{5}{4}$	1	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.
3) $k > \frac{3}{4}, k \neq 1$

autovalore	m.g.	m.a.
1	2	2
$\frac{1}{2}(1 + 2k - \sqrt{4k-3})$	1	1
$\frac{1}{2}(1 + 2k + \sqrt{4k-3})$	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 e quindi F è diagonalizzabile.

4) $k = 1$

autovalore	m.g.	m.a.
1	2	3
2	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k > \frac{3}{4}, k \neq 1$. ■

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 3 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ un riferimento affine. Si considerino le rette

$$r_k : \begin{cases} X = 2 - t \\ Y = k + 2t \\ Z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad s : \begin{cases} X + Y + Z = 1 \\ -X + Y = 1 \end{cases}.$$

(a) Determinare per quali valori di k si ha che r_k ed s sono complanari.

(b) Determinare tutti piani p di $\mathbf{A}$ (se esistono) tali che p è incidente a r_k per ogni k e p è parallelo ad s.

(c) Determinare se esiste un piano p' di $\mathbf{A}$ tale che p', r_k ed s sono a due a due incidenti.

SOLUZIONE:

(a) Intanto osserviamo che r_k è il sottospazio (di dimensione 1) che passa per il punto $Q = Q(2, k, 1)$ ed ha giacitura $giac(r_k) =< -e_1 + 2e_2 + e_3 >$.

Ora scriviamo le equazioni parametriche di s. Posto $Z = u$ si ha

$$\begin{cases} X + Y = 1 - u \\ -X + Y = 1 \end{cases}$$

da cui

$$s : \begin{cases} X = -\frac{1}{2}u \\ Y = 1 - \frac{1}{2}u \\ Z = u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$$

e quindi s è il sottospazio (di dimensione 1) che passa per il punto $Q_1 = Q_1(0, 1, 0)$ ed ha giacitura $giac(s) =< -\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + e_3 >=< e_1 + e_2 - 2e_3 >$.

Notiamo, per il seguito, che r_k non è parallela ad s per nessun k.

Ora r_k ed s sono complanari se e solo se

$$0 = \begin{vmatrix} a - a' & b - b' & c - c' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & k - 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12 - k$$

dunque se e solo se $k = -12$.
(b) Sia $AX + BY + CZ + D = 0$ la (possibile) equazione di p. Dato che p è parallelo ad s, si ha $giac(s) \subset giac(p)$ e quindi la terna $(1, 1, -2)$, corrispondente alle coordinate di un generatore della giacitura di s, dovrà soddisfare l'equazione della giacitura di p, cioè $AX + BY + CZ = 0$. Ne segue che

$$A + B - 2C = 0$$

ovvero

$$A = -B + 2C.$$

Ora p è incidente r_k per ogni k se e solo se non è parallelo a r_k, dunque se e solo se la terna $(-1, 2, 1)$, corrispondente alle coordinate di un generatore della giacitura di r_k, non soddisfa l'equazione della giacitura di p, cioè

$$-A + 2B + C \neq 0$$

ovvero, sostituendo,

$$3B - C \neq 0.$$

Se ne deduce che tutti i piani p di $\mathbf{A}$ incidenti a r_k per ogni k e paralleli ad s hanno equazione

$$(-B + 2C)X + BY + CZ + D = 0 \text{ con } C \neq 3B.$$

(c) Affinché esista un piano p' di $\mathbf{A}$ tale che p', r_k ed s sono a due a due incidenti, deve essere, in particolare, che r_k ed s sono incidenti. Dunque devono essere complanari, e quindi, per la (a), $k = -12$. Del resto se $k = -12$, sempre dalla (a) sappiamo che r_k ed s sono complanari e non parallele, quindi necessariamente incidenti. Ma allora basta prendere un qualsiasi piano p' di $\mathbf{A}$ che passa per $r_k \cap s$ e non contiene nessuna delle due rette (di tali piani, ovviamente, ce ne sono infiniti). Tale piano sarà allora incidente a r_k e ad s.
Pertanto p' esiste se e solo se $k = -12$. ■
6. Siano $F : V \to W$ e $G : W \to U$ due applicazioni lineari.
(a) Dimostrare che $r(G \circ F) = r(F) - \dim(N(G) \cap \mathrm{Im}(F))$.
(b) Costruire un esempio esplicito, con spazi di dimensione almeno 2, in cui F è suriettiva, G non è iniettivo e $r(G \circ F) = \dim W - \dim U$.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo prima che $\mathrm{Im}(G \circ F) = \mathrm{Im}(G_{|\mathrm{Im}(F)})$. Infatti

$$u \in \mathrm{Im}(G \circ F) \iff \exists v \in V \text{ tale che } u = G(F(v)) \iff u \in \mathrm{Im}(G_{|\mathrm{Im}(F)}).$$

Quindi, per il torema di rango-nullità,

$$(*) \quad r(G \circ F) = r(G_{|\mathrm{Im}(F)}) = \dim \mathrm{Im}(F) - \dim N(G_{|\mathrm{Im}(F)}) = r(F) - \dim N(G_{|\mathrm{Im}(F)}).$$

Inoltre $N(G_{|\mathrm{Im}(F)}) = N(G) \cap \mathrm{Im}(F)$. Infatti

$$w \in N(G_{|\mathrm{Im}(F)}) \iff w \in \mathrm{Im}(F) \text{ e } G(w) = 0 \iff w \in N(G) \cap \mathrm{Im}(F).$$

Dalla $(*)$ deduciamo che $r(G \circ F) = r(F) - \dim(N(G) \cap \mathrm{Im}(F))$.
(b) Siano $V = W = \mathbb{R}^4, U = \mathbb{R}^2$ e siano $F = id_{\mathbb{R}^4}$ e $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'unica applicazione lineare tale che $G(E_1) = E_1', G(E_2) = E_2', G(E_3) = G(E_4) = 0$, dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\{E_1', E_2'\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Allora F e G sono suriettive, G non è iniettivo e, ovviamente, $r(G \circ F) = r(G) = 2 = \dim W - \dim U$. ■