UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2015-2016

Prova scritta del 16-6-2016

TESTO

A. Per il recupero del primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il recupero del secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ kx_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - kx_3 = -1 \\ x_2 + kx_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Siano $U_k =< A_1, A_2, A_3, A_4 >$ e $W_k =< B, C >$ i sottospazi generati.

(a) Determinare le dimensioni di U_k, W_k e scrivere esplicitamente una base di ciascun sottospazio.

(b) Determinare la dimensione di $U_k \cap W_k$ e per quali k si ha che $W_k \subseteq U_k$.

(c) Determinare se esiste un sottospazio V di $M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$U_k \oplus V = W_k \oplus V = M_2(\mathbb{R});$$

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & k \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) prodotto di matrici elementari e, in tal caso, esprimere A come tale prodotto.

(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -k \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per quali k esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma, simultaneamente, A e B in I_3?

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Siano $v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,1,0,-1) \in \mathbb{R}^4$, sia $U =< v_1, v_2 >$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$F_{|U} = id_U, F(v_1 + E_1) = E_1 - E_2 + kE_4, F(E_2) = E_1 + kE_2$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 3 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ un riferimento affine. Si considerino le rette

$$r_k : \begin{cases} X = 2 - t \\ Y = k + 2t \\ Z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad s : \begin{cases} X + Y + Z = 1 \\ -X + Y = 1 \end{cases}.$$

(a) Determinare per quali valori di k si ha che r_k ed s sono complanari.

(b) Determinare tutti piani p di $\mathbf{A}$ (se esistono) tali che p è incidente a r_k per ogni k e p è parallelo ad s.

(c) Determinare se esiste un piano p' di $\mathbf{A}$ tale che p', r_k ed s sono a due a due incidenti.

6. Siano $F : V \to W$ e $G : W \to U$ due applicazioni lineari.

(a) Dimostrare che $r(G \circ F) = r(F) - \dim(N(G) \cap \mathrm{Im}(F))$.

(b) Costruire un esempio esplicito, con spazi di dimensione almeno 2, in cui F è suriettiva, G non è iniettivo e $r(G \circ F) = \dim W - \dim U$.