UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2015-2016

Prova scritta del 16-9-2016

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + kX_3 - kX_4 = 1 \\ kX_1 - kX_2 - X_3 = 0 \\ 4X_1 - 5X_2 - (k+1)X_3 + kX_4 = -1. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & k & -k \\ k & -k & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -k-1 & k \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ k & -k & -1 \\ 4 & -5 & -k-1 \end{vmatrix} = k - 6, \begin{vmatrix} 2 & -1 & -k \\ k & -k & 0 \\ 4 & -5 & k \end{vmatrix} = 0$$

da cui deduciamo che $r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 6 \\ 2 & \text{se } k = 6 \end{cases}$.

Se $k \neq 6$ si ha allora $r(A) = r(A\ b) = 3$ e il sistema è compatibile. Per calcolare le soluzioni poniamo $X_4 = t$ e troviamo, con la regola di Cramer

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1+kt & -1 & k \\ 0 & -k & -1 \\ -1-kt & -5 & -k-1 \end{vmatrix}}{k-6} = 1 + kt, \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+kt & k \\ k & 0 & -1 \\ 4 & -1-kt & -k-1 \end{vmatrix}}{k-6} = 1 + kt,$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1+kt \\ k & -k & 0 \\ 4 & -5 & -1-kt \end{vmatrix}}{k-6} = 0.$$

Se $k=6$ abbiamo
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \\ 4 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$
quindi, per il principio dei minori orlati, $r(A\ b)=2$ e ne deduciamo che il sistema è compatibile. Per calcolare le soluzioni poniamo $X_4=t, X_3=s$ e troviamo, con la regola di Cramer
$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-6s+6t & -1 \\ -1+7s-6t & -5 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{36t-37s+6}{6},\ X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-6s+6t \\ 4 & -1+7s-6t \end{vmatrix}}{-6} = \frac{36t-38s+6}{6}.$$
Concludiamo che il sistema è compatibile per ogni k e le soluzioni sono come sopra. ∎

2. Siano k un numero reale, $W_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo
$$\begin{cases} X-Y-Z=0 \\ X-Z=0 \\ kX+kY=0 \end{cases}$$
e siano $v_1=(1,0,0,2), v_2=(-1,0,0,1), v_3=(k,1,-1,0) \in \mathbb{R}^4$. Siano V, V' e U_k i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$: $V=<v_1,v_2>, V'=<v_3>$ e $U_k=V+V'$.
(a) Determinare una base di W_k ed una di U_k.
(b) Determinare le dimensioni di U_k+W_k e di $U_k \cap W_k$.
(c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $\{(0,0,0,1), v_1, v_2, v\}$ non generano U_k+W_k.

SOLUZIONE:

(a) Calcoliamo prima la dimensione di W_k. Posto, nelle equazioni di W_k, $Z=s, W=t$ si ha
$$(*)\quad \begin{cases} X=s \\ Y=0 \\ ks=0 \end{cases}$$
e ci sono due casi: se $k=0$ allora i vettori di W_0 sono tutti del tipo
$$(s,0,s,t)=s(1,0,1,0)+t(0,0,0,1)$$
pertanto una base di W_0 è $\{(1,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ e $\dim(W_0)=2$;
invece se $k \neq 0$ si ha $s=0$ in $(*)$, quindi $X=Z=0$ e i vettori di W_k sono tutti del tipo
$$(0,0,0,t)=t(0,0,0,1)$$
pertanto una base di W_k è $\{(0,0,0,1)\}$ e $\dim(W_k)=1$. Allora $\dim W_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k=0 \end{cases}$.

Ora $U_k = V + V' =< v_1, v_2 > + < v_3 >=< v_1, v_2, v_3 >$, quindi $\dim U_k = r(A)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ k & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservato che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

si ha $\dim U_k = r(A) = 3$ per ogni k ed una sua base è $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Consideriamo la matrice che ha per righe i generatori di U_k e W_k, cioè, se $k = 0$,

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre, se $k \neq 0$,

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ k & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ k & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pertanto $\dim(U_k + W_k) = r(B_k) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0 \\ 4 & \text{se } k = 0 \end{cases}$. In particolare osserviamo che, se $k \neq 0$, ne segue che $W_k \subseteq U_k$. Inoltre, usando la formula di Grassmann,

$$\dim(U_k \cap W_k) = \dim(U_k) + \dim(W_k) - \dim(U_k + W_k) = 3 + \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases} - \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0 \\ 4 & \text{se } k = 0 \end{cases} = 1$$

per ogni k.

(c) Osserviamo intanto che $(0, 0, 0, 1) = \frac{1}{3}(v_1 + v_2)$, quindi

$$< (0, 0, 0, 1), v_1, v_2, v >=< v_1, v_2, v > .$$

Ne segue che, se $k = 0$, essendo $\dim(U_0 + W_0) = 4$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$ si ha che $\{(0, 0, 0, 1), v_1, v_2, v\}$ non generano $U_0 + W_0$, poichè $\dim < v_1, v_2, v >\leq 3$. Invece se $k \neq 0$, essendo, come visto in (b), $W_k \subseteq U_k$, ne segue che $U_k + W_k = U_k =< v_1, v_2, v_3 >$. Pertanto $\{(0, 0, 0, 1), v_1, v_2, v\}$

non generano $U_k + W_k$ se e solo se $< v_1, v_2, v >\neq< v_1, v_2, v_3 >$. Ora, considerando che dim $< v_1, v_2, v_3 >= 3$, è facile vedere che $< v_1, v_2, v >=< v_1, v_2, v_3 >$ se e solo se $v \in< v_1, v_2, v_3 >, v \notin< v_1, v_2 >$. Quindi, per negazione, $< v_1, v_2, v >\neq< v_1, v_2, v_3 >$ se e solo se o $v \notin< v_1, v_2, v_3 >$ o $v \in< v_1, v_2 >$. ■

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Si considerino le rette

$$r_k : \begin{cases} X = k + t \\ Y = 2 + t \\ Z = t \\ W = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad s_k : \begin{cases} X = -1 + u \\ Y = 1 - u \\ Z = ku \\ W = 0 \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare per quali valori di k si ha che r_k ed s_k sono parallele, sghembe o incidenti.
(b) Determinare un sottospazio affine di dimensione 3 che contiene entrambe le rette. Inoltre determinare per quali valori di k si ha che r_k ed s_k sono complanari.
(c) Determinare tutti gli iperpiani H di $\mathbf{A}$ (se esistono) tali che sia H ed r_k che H e s_k sono incidenti, per ogni k.

SOLUZIONE:

Osserviamo intanto che conviene risolvere prima (b). Questo ci darà informazioni anche su (a).
(b) e (a) Sia $S = \{P = P(X, Y, Z, W) \in A : W = 0\}$. Essendo, chiaramente, $S \neq \emptyset$ ne segue che S è un sottospazio affine di A definito da un'unica equazione, quindi di dimensione $4 - 1 = 3$. Ovviamente si ha che $r_k \subset S$ e $r_k \subset S$. A questo punto possiamo considerare r_k ed s_k come rette nello spazio affine S di dimensione 3 ed è chiaro che $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ è un riferimento affine di S con coordinate X, Y, Z. Pertanto, in S, le equazioni di r_k ed s_k sono

$$r_k : \begin{cases} X = k + t \\ Y = 2 + t \\ Z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad s_k : \begin{cases} X = -1 + u \\ Y = 1 - u \\ Z = ku \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

Inoltre r_k è il sottospazio di dimensione 1 di S che passa per il punto $Q = Q(k, 2, 0) \in S$ ed ha giacitura $giac(r_k) =< e_1 + e_2 + e_3 >$, mentre s_k è il sottospazio di dimensione 1 di S che passa per il punto $R = R(-1, 1, 0) \in S$ ed ha giacitura $giac(s_k) =< e_1 - e_2 + ke_3 >$. Notiamo, per il seguito, che r_k non è parallela ad s_k per nessun k.
Inoltre r_k ed s_k sono complanari se e solo se

$$0 = \begin{vmatrix} a - a' & b - b' & c - c' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k + 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = k^2 + k + 2.$$

Ma questa equazione non ha soluzioni reali, pertanto r_k ed s_k non sono mai complanari. In particolare non possono neanche essere incidenti. Se ne conclude che r_k ed s_k sono sghembe per ogni k.

(c) Sia V lo spazio vettoriale su cui è definito A. Osserviamo che, se r è una retta di A, affinchè H ed r siano incidenti, è necessario e sufficiente che non siano paralleli: infatti, per definizione di incidenza, se H ed r sono incidenti, allora non sono paralleli; viceversa se H ed r non sono paralleli, allora la giacitura di r non è contenuta in quella di H. Dato che quest'ultima ha dimensione 3, si ha $giac(r) + giac(H) = V$. Ma allora, nel sistema omogeneo che definisce $H \cap r$, si ha che la matrice dei coefficienti ha rango $4 = \dim V$ e quindi, per Kronecker-Rouché-Capelli, tale sistema è compatibile e il sottospazio $H \cap r$ ha dimensione $\dim A - 4 = 0$. Quindi $H \cap r$ è un punto e pertanto H ed r sono incidenti.

Sia ora $AX + BY + CZ + DW + E = 0$ l'equazione di H. Per quanto detto sopra ci basta imporre che H ed r_k non sono paralleli e che H ed s_k non sono paralleli, ovvero che $giac(r_k) \not\subseteq giac(H)$ e $giac(s_k) \not\subseteq giac(H)$. Questo vuol dire che $(1, 1, 1, 0)$ e $(1, -1, k, 0)$ non soddisfano $AX + BY + CZ + DW = 0$, quindi le condizioni sono

$$A + B + C \neq 0, A - B + kC \neq 0. \ \blacksquare$$

4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $v = e_1 + e_2$. Sia F un endomorfismo di V tale che $v \in V_2(F)$ e

$$F(e_2) = e_2 - e_1, F(e_4 + e_3) = e_3 - e_4, F(e_3 + v) = v + ke_4.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{v, e_2, e_4 + e_3, e_3 + v\}$ è una base di V in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Per ipotesi sappiamo che $v \in V_2(F)$, ovvero che

$$F(v) = 2v.$$

Per determinare la matrice associata ad F nella base e, esprimiamo

$$F(e_2) = e_2 - e_1, F(e_4 + e_3) = e_3 - e_4, F(e_3 + v) = v + ke_4$$

nella base e. Si ha

$$av + be_2 + c(e_4 + e_3) + d(e_3 + v) = (a + d)e_1 + (a + b + d)e_2 + (c + d)e_3 + ce_4 = e_2 - e_1$$

se e solo se

$$\begin{cases} a + d = -1 \\ a + b + d = 1 \\ c + d = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = -1, b = 2, c = 0, d = 0$. Pertanto

$$F(e_2) = -v + 2e_2 + 0(e_4 + e_3) + 0(e_3 + v).$$

Analogamente

$$av + be_2 + c(e_4 + e_3) + d(e_3 + v) = (a + d)e_1 + (a + b + d)e_2 + (c + d)e_3 + ce_4 = e_3 - e_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ a + b + d = 0 \\ c + d = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = -2, b = 0, c = -1, d = 2$. Pertanto

$$F(e_4 + e_3) = -2v + 0e_2 - (e_4 + e_3) + 2(e_3 + v).$$

Inoltre

$$av + be_2 + c(e_4 + e_3) + d(e_3 + v) = (a + d)e_1 + (a + b + d)e_2 + (c + d)e_3 + ce_4 = v + ke_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} a + d = 1 \\ a + b + d = 1 \\ c + d = 0 \\ c = k \end{cases}$$

che ha soluzione $a = 1 + k, b = 0, c = k, d = -k$. Dunque

$$F(e_3 + v) = (1 + k)v + 0e_2 + k(e_4 + e_3) - k(e_3 + v).$$

Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1+k \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & k \\ 0 & 0 & 2 & -k \end{pmatrix}.$$

Allora il polinomio caratteristico di F è (sviluppando prima per la prima colonna e poi ancora per la prima colonna)

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 2-T & -1 & -2 & 1+k \\ 0 & 2-T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-T & k \\ 0 & 0 & 2 & -k-T \end{vmatrix} = (T-2)^2[T^2+(1+k)T-k].$$

Le radici reali di $(T-2)^2[T^2+(1+k)T-k] = 0$ sono 2 e, se $k \leq -3-2\sqrt{2}$ o $k \geq -3+2\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}(-1-k \pm \sqrt{k^2+6k+1})$. Osserviamo che, per $k \leq -3-2\sqrt{2}$ o $k \geq -3+2\sqrt{2}$, si ha $\frac{1}{2}(-1-k \pm \sqrt{k^2+6k+1}) = 2$ se e solo se $k = -6$.
Quindi gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k = -6$	$\lambda_1 = 2$ (m.a. 3), $\lambda_2 = 3$ (m.a. 1)
$k < -3-2\sqrt{2}, k \neq -6$ o $k > -3+2\sqrt{2}$	$\lambda_1 = 2$ (m.a. 2), $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1-k-\sqrt{k^2+6k+1})$ (m.a. 1),
	$\lambda_3 = \frac{1}{2}(-1-k+\sqrt{k^2+6k+1})$ (m.a. 1)
$k = -3-2\sqrt{2}$	$\lambda_1 = 2$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 1+\sqrt{2}$ (m.a. 2)
$-3-2\sqrt{2} < k < -3+2\sqrt{2}$	$\lambda_1 = 2$ (m.a. 2)
$k = -3+2\sqrt{2}$	$\lambda_1 = 2$ (m.a. 2), $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$ (m.a. 2)

(b) Prendiamo $\lambda_1 = 2$ come autovalore da considerare e calcoliamo la base di $V_2(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 2 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - 2I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} -y-2z+(1+k)w = 0 \\ -3z+kw = 0 \\ 2z-(k+2)w = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $y = z = w = 0$ se $k \neq -6$, oppure $w = t, z = -2t, y = -t$ se $k = -6$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 2 sono tutti del tipo xv se $k \neq -6$ e una base di $V_2(F)$ è $\{v\}$ e $\dim V_2(F) = 1$, oppure $xv + ye_2 + z(e_4+e_3) + w(e_3+v) = xv + t(e_1 - e_3 - 2e_4)$ se $k = -6$ e una base di $V_2(F)$ è $\{v, e_1 - e_3 - 2e_4\}$ e $\dim V_2(F) = 2$.
(c) Osserviamo che se $k \neq -6$, si ha $m.g.(2) = 1 < 2 = m.a.(2)$, mentre se $k = -6$, si ha $m.g.(2) = 2 < 3 = m.a.(2)$.
Se ne conclude che F non è diagonalizzabile per nessun k. ■