UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2015-2016

Prova scritta del 16-9-2016

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + kX_3 - kX_4 = 1 \\ kX_1 - kX_2 - X_3 = 0 \\ 4X_1 - 5X_2 - (k+1)X_3 + kX_4 = -1. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Siano k un numero reale, $W_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X - Y - Z = 0 \\ X - Z = 0 \\ kX + kY = 0 \end{cases}$$

e siano $v_1 = (1,0,0,2), v_2 = (-1,0,0,1), v_3 = (k,1,-1,0) \in \mathbb{R}^4$. Siano V, V' e U_k i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$: $V =< v_1, v_2 >, V' =< v_3 >$ e $U_k = V + V'$.

(a) Determinare una base di W_k ed una di U_k.

(b) Determinare le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \cap W_k$.

(c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $\{(0,0,0,1), v_1, v_2, v\}$ non generano $U_k + W_k$.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Si considerino le rette

$$r_k : \begin{cases} X = k + t \\ Y = 2 + t \\ Z = t \\ W = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad s_k : \begin{cases} X = -1 + u \\ Y = 1 - u \\ Z = ku \\ W = 0 \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare per quali valori di k si ha che r_k ed s_k sono parallele, sghembe o incidenti.

(b) Determinare un sottospazio affine di dimensione 3 che contiene entrambe le rette. Inoltre determinare per quali valori di k si ha che r_k ed s_k sono complanari.

(c) Determinare tutti gli iperpiani H di $\mathbf{A}$ (se esistono) tali che sia H ed r_k che H e s_k sono incidenti, per ogni k.

4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $v = e_1 + e_2$. Sia F un endomorfismo di V tale che $v \in V_2(F)$ e

$$F(e_2) = e_2 - e_1, F(e_4 + e_3) = e_3 - e_4, F(e_3 + v) = v + ke_4.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.