UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2015-2016

Prova scritta del 26-1-2017

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_2 - kX_4 = 0 \\ kX_1 - X_2 - kX_3 + X_4 = 1 \\ X_1 - kX_2 - X_3 = 1 \\ 2X_1 - (1+k^2)X_2 - (1+2k)X_4 = -2. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Siano k un numero reale, sia $U_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X + Y + 2Z = 0 \\ X + Z = 0 \\ (k+1)X + (k+1)W = 0 \end{cases}$$

e siano $v_1 = (1,0,0,-1), v_2 = (-k,0,0,-1), v_3 = (k,1,1,1), v_4 = (0,-k,1,0) \in \mathbb{R}^4$. Sia $W_k = < v_1, v_2, v_3, v_4 >$.

(a) Determinare una base di U_k ed una di W_k.

(b) Determinare le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \cap W_k$.

(c) Determinare tutti i valori di k (se esistono) per i quali c'è un sottospazio Z di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$U_k \oplus Z = \mathbb{R}^4 \text{ e } W_k \cap U_k \subseteq Z.$$

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Sia S il sottospazio con le seguenti equazioni

$$S : \begin{cases} X + Y = 1 \\ X + W = 0 \end{cases}$$

e sia T_k il sottospazio passante per il punto $Q = Q(1,0,0,0)$ e di giacitura

$W_k = < e_1 + e_2, e_1 - ke_3 >$.

(a) Determinare i valori di k per i quali S e T_k sono sottospazi affini di A e, in tal caso, calcolare la loro dimensione.

(b) Determinare per quali k si ha che S e T_k sono paralleli, incidenti o sghembi.

(c) Determinare per quali k si ha che $S \cap T_k$ è un sottospazio affine di A.

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Siano $v_1 = (1,0,0,1), v_2 = E_2 \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$v_1, v_2 \in N(F), F(E_1) = E_1 + kv_1, F(E_1 - E_4 + E_3) = E_1 + kE_3$$

dove E_1, E_2, E_3, E_4 è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.