UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2015-2016

Prima prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Si determini, utilizzando esclusivamente operazioni elementari, per quali valori $k \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 - X_2 + X_3 = 1 \\ X_1 + kX_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - 2X_2 = 1 \\ (k+3)X_1 + (2k-3)X_2 - X_3 = 2 \end{cases}$$

e, quando è compatibile, se ne calcolino esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ k+3 & 2k-3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_3 abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & k & -1 & 0 \\ k & -1 & 1 & 1 \\ k+3 & 2k-3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - kR_1, R_4 \to R_4 - (k+3)R_1$ danno

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & k+2 & -1 & -1 \\ 0 & 2k-1 & 1 & -k+1 \\ 0 & 4k+3 & -1 & -k-1 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 - 2R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & k+2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & 3-k \\ 0 & 4k+3 & -1 & -k-1 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_2 con R_3 abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 3-k \\ 0 & k+2 & -1 & -1 \\ 0 & 4k+3 & -1 & -k-1 \end{pmatrix}$$

e con le operazioni $R_3 \to R_3 + \frac{k+2}{5} R_2, R_4 \to R_4 + \frac{4k+3}{5} R_2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 3-k \\ 0 & 0 & \frac{3k+1}{5} & \frac{-k^2+k+1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{12k+4}{5} & \frac{-4k^2+4k+4}{5} \end{pmatrix}$$

da cui con l'operazione $R_4 \to R_4 - 4R_3$ si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 3-k \\ 0 & 0 & \frac{3k+1}{5} & \frac{-k^2+k+1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo prima $3k+1=0$, ovvero $k=-\frac{1}{3}$. Allora $\frac{-k^2+k+1}{5} = \frac{7}{45} \neq 0$ e pertanto il sistema è incompatibile in questo caso.
Invece se $k \neq -\frac{1}{3}$ il sistema è a gradini, quindi si conclude che **il sistema è compatibile se e solo se $\mathbf{k} \neq -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$**. In tal caso ha come soluzioni (dopo un pò di calcoli):

$$\mathbf{X_3} = \frac{\mathbf{-k^2+k+1}}{\mathbf{3k+1}}, \ \mathbf{X_2} = -\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{3k+1}}, \ \mathbf{X_1} = \frac{\mathbf{k+1}}{\mathbf{3k+1}}. \ \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Usando solo operazioni elementari, si determinino i valori di k per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli l'inversa.
(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di k (se esistono) per i quali esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

SOLUZIONE:

(a) Applichiamo operazioni elementari alla matrice

$$(A\ I_3) = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k-1 & k-2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 + (k+1)R_2$ si ottiene la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k-1 & -1 & k+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $2k-1=0$ se e solo se $k=\frac{1}{2}$, dunque, da C,

$$r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = \frac{1}{2} \\ 3 & \text{se } k \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

e quindi **A è invertibile se e solo se** $\mathbf{k \neq \frac{1}{2}}$.

Sia ora $k \neq \frac{1}{2}$ e proseguiamo dalla matrice C, ponendo, per comodità, $d = 2k-1$.

Con l'operazione $R_3 \to \frac{1}{d}R_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{d} & \frac{k+1}{d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_1 \to R_1 - 2R_3, R_2 \to R_2 - R_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & \frac{2k+1}{d} & \frac{-2k-2}{d} & -\frac{2}{d} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{d} & \frac{k-2}{d} & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{d} & \frac{k+1}{d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to R_1 - kR_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{k+1}{d} & \frac{-k^2-2}{d} & \frac{k-2}{d} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{d} & \frac{k-2}{d} & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{d} & \frac{k+1}{d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che

$$\mathbf{A^{-1}}=\frac{1}{2k-1}\begin{pmatrix} k+1 & -k^2-2 & k-2 \\ 1 & k-2 & -1 \\ -1 & k+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Supponiamo che esista una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B. Allora, come è noto, i sistemi $AX = 0$ e $BX = 0$ sono equivalenti. Ora il secondo ha soluzioni $X_1 = X_2 = 0, X_3 = t, t \in\mathbb{R}$, quindi ha, per esempio, la soluzione $(0, 0, 1)$. Ma si vede subito che quest'ultima non è soluzione di $AX = 0$. Si conclude pertanto che **non esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.** ■

3. Sia $k \in\mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U_k il sottospazio vettoriale

$$U_k =< (1, k, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (2, 4, -1, 0) >$$

e W_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + X_4 = 0 \\ kX_2 - X_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di U_k, W_k e si scriva esplicitamente una base di tali sottospazi.

(b) Si determinino le dimensioni di $W_k + U_k$ e di $W_k \cap U_k$.

(c) Si determinino tutti i valori di k (se esistono) per i quali c'è un sottospazio Z di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$U_k \oplus Z = \mathbb{R}^4 \text{ e } W_k \cap U_k \subset Z, W_k \cap U_k \neq Z.$$

SOLUZIONE:

(a) Per calcolare la dimensione di U_k consideriamo la matrice dei suoi generatori

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e facciamo operazioni elementari. Scambiando R_2 con R_3 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to R_2 - 2R_1$, si ottiene la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 4-2k & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che

$$\mathbf{dim(U_k) = r(A)} = \begin{cases} 2 & \textbf{se } k = 2 \\ 3 & \textbf{se } k \neq 2 \end{cases}.$$

Inoltre, sempre da A, deduciamo che **una base di $\mathbf{U_k}$ è**

$$\{(\mathbf{1,2,1,0}),(\mathbf{0,0,1,0})\} \textbf{ se } \mathbf{k=2} \textbf{ e } \{(\mathbf{1,k,1,0}),(\mathbf{0,4-2k,-3,0}),(\mathbf{0,0,1,0})\} \textbf{ se } \mathbf{k \neq 2}.$$

Per calcolare la dimensione di W_k risolviamo invece il suo sistema. Posto $X_2 = s, X_4 = t$, si trova $X_1 = -t, X_3 = ks$, quindi ogni vettore di W_k è del tipo

$$(-t, s, ks, t) = t(-1,0,0,1) + s(0,1,k,0)$$

e, essendo $(-1,0,0,1),(0,1,k,0)$ linearmente indipendenti, **una base di $\mathbf{W_k}$ è**

$$\{(\mathbf{-1,0,0,1}),(\mathbf{0,1,k,0})\} \textbf{ e } \dim \mathbf{W_k = 2} \textbf{ per ogni } \mathbf{k}.$$

(b) Per calcolare la dimensione di $W_k + U_k$, utilizziamo le basi di W_k e U_k trovate in (a). Facciamo dunque operazioni elementari sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 4-2k & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_4 \to R_4 + R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 4-2k & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_5, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 4-2k & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 - kR_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 1 \\ 0 & 4-2k & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 - (1-k^2)R_3$ si ha la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4-2k & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

e si vede subito che $\mathbf{dim(W_k + U_k) = r(B) = 4}$ **per ogni** $\mathbf{k}$.

Per la formula di Grassmann

$$\mathbf{dim(W_k \cap U_k)} = \dim W_k + \dim U_k - \dim(W_k + U_k) = 2 + \begin{cases} 2 & \text{se } k = 2 \\ 3 & \text{se } k \neq 2 \end{cases} - 4 = \begin{cases} 0 & \textbf{se } k = 2 \\ 1 & \textbf{se } k \neq 2 \end{cases}.$$

(c) Sia Z un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ tale che $U_k \oplus Z = \mathbb{R}^4$ e $W_k \cap U_k \subset Z, W_k \cap U_k \neq Z$. Dalla prima condizione su Z deduciamo che $\dim Z = 4 - \dim U_k = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 2 \\ 1 & \text{se } k \neq 2 \end{cases}$.

Ora, se $k \neq 2$ si ha $\dim Z = \dim(W_k \cap U_k)$, quindi, dalla seconda condizione su Z, si ha che $Z = W_k \cap U_k$, contraddicendo la terza condizione. Invece se $k = 2$ abbiamo $\dim(W_2 \cap U_2) = 0$, quindi $W_2 \cap U_2 = \{0\}$. Dato che $\dim(W_2 + U_2) = 4$ si ha pertanto che $W_2 \oplus U_2 = \mathbb{R}^4$ e quindi basta scegliere $Z = W_2$.

Si conclude che **Z esiste se e solo se** $\mathbf{k = 2}$. ■