UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2015-2016

Prima prova di esonero

TESTO

1. Si determini, utilizzando esclusivamente operazioni elementari, per quali valori $k \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 - X_2 + X_3 = 1 \\ X_1 + kX_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - 2X_2 = 1 \\ (k+3)X_1 + (2k-3)X_2 - X_3 = 2 \end{cases}$$

e, quando è compatibile, se ne calcolino esplicitamente le soluzioni.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Usando solo operazioni elementari, si determinino i valori di k per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli l'inversa.

(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di k (se esistono) per i quali esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U_k il sottospazio vettoriale

$$U_k = < (1, k, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (2, 4, -1, 0) >$$

e W_k il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + X_4 = 0 \\ kX_2 - X_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino le dimensioni di U_k, W_k e si scriva esplicitamente una base di tali sottospazi.

(b) Si determinino le dimensioni di $W_k + U_k$ e di $W_k \cap U_k$.

(c) Si determinino tutti i valori di k (se esistono) per i quali c'è un sottospazio Z di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$U_k \oplus Z = \mathbb{R}^4 \text{ e } W_k \cap U_k \subset Z, W_k \cap U_k \neq Z.$$