UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2015-2016

Seconda prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $v = -e_1 + e_3$. Sia F un endomorfismo di V tale che v è autovettore di F con autovalore k e

$$F(e_1) = e_1 + v, F(e_2 + e_3) = e_3 - e_4, F(e_3 + e_4) = e_1 + ke_4.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.
(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{v, e_1, e_2 + e_3, e_3 + e_4\}$ è una base di V in quanto

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Per determinare la matrice associata ad F osserviamo intanto che, per ipotesi

$$F(v) = kv \text{ e } F(e_1) = v + e_1.$$

Ora esprimiamo $F(e_2 + e_3) = e_3 - e_4$ e $F(e_3 + e_4) = e_1 + ke_4$ nella base e. Si ha

$$av + be_1 + c(e_2 + e_3) + d(e_3 + e_4) = (-a + b)e_1 + ce_2 + (a + c + d)e_3 + de_4 = e_3 - e_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ c = 0 \\ a + c + d = 1 \\ d = -1 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = 2, b = 2, c = 0, d = -1$. Pertanto

$$F(e_2 + e_3) = 2v + 2e_1 + 0(e_2 + e_3) - (e_3 + e_4).$$

$$av + be_1 + c(e_2 + e_3) + d(e_3 + e_4) = (-a + b)e_1 + ce_2 + (a + c + d)e_3 + de_4 = e_1 + ke_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ c = 0 \\ a + c + d = 0 \\ d = k \end{cases}$$

che ha soluzione $a = -k, b = 1 - k, c = 0, d = k$. Pertanto

$$F(e_3 + e_4) = -kv + (1 - k)e_1 + 0(e_2 + e_3) + k(e_3 + e_4).$$

Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 & -k \\ 0 & 1 & 2 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} k-T & 1 & 2 & -k \\ 0 & 1-T & 2 & 1-k \\ 0 & 0 & -T & 0 \\ 0 & 0 & -1 & k-T \end{vmatrix} = T(T-1)(T-k)^2.$$

Quindi gli autovalori di F sono:

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k \neq 0, 1$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_3 = k$ (m.a. 2)
$k = 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 3), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 1)
$k = 1$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 1$ (m.a. 3)

(b) Prendiamo $\lambda_1 = 0$ nel caso $k = 0$ come autovalore da considerare nel punto (b) e calcoliamo la base di $V_0(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 0 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - 0I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ y + 2z + w = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $y = z = w = 0$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo xv e una base di $V_0(F)$ è $\{v\}$.

(c) Dalla (a) deduciamo che i casi da analizzare sono tre

1) $k \neq 0, 1$.

Calcoliamo la molteplicità geometrica di $\lambda_3 = k$. Posto $T = k$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) - kI_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -k \\ 0 & 1-k & 2 & 1-k \\ 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $k \neq 0$ possiamo eliminare la terza riga (che è multiplo della quarta) e la prima colonna, quindi

$$r(M_e(F) - kI_4) = r(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1-k & 2 & 1-k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}).$$

Ricordando che $k \neq 0, 1$, si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1-k & 2 & 1-k \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - k^2 = 0 \text{ se e solo se } k = -1$$

e quindi $r(M_e(F) - kI_4) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq -1 \\ 2 & \text{se } k = -1 \end{cases}$. Dunque

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	1
1	1	1
k	2 (se $k = -1$), 1 (se $k \neq -1$)	2

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 4 se e solo se $k = -1$, quindi F è diagonalizzabile se e solo se $k = -1$.

2) $k = 1$.

Calcoliamo la molteplicità geometrica di $\lambda_2 = 1$. Posto $T = 1$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 e quindi

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	1
1	2	3

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 3 e quindi F non è diagonalizzabile.

3) $k = 0$.

Utilizzando il calcolo in (b) si ha

molteplicità geometrica (m.g) e algebrica (m.a.) degli autovalori

autovalore	m.g.	m.a.
0	1	3
1	1	1

In questo caso la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 2 e quindi F non è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k = -1$. ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Sia S il sottospazio con le seguenti equazioni

$$S : \begin{cases} X + Y - Z = 1 \\ X + W = 0 \end{cases}$$

e sia T_k il sottospazio passante per il punto $Q = Q(1, 0, 0, 2)$ e di giacitura

$W_k =< e_1 + ke_2, ke_1 + e_2 >$.

(a) Determinare i valori di k per i quali S e T_k sono sottospazi affini di A e, in tal caso, calcolare la loro dimensione.

(b) Determinare per quali k si ha che S e T_k sono paralleli, incidenti o sghembi.

(c) Determinare per quali k esiste un iperpiano H tale che $S \subseteq H$ e $T_k \subseteq H$.

SOLUZIONE:

(a) Sappiamo dalla teoria che, affinchè S sia un sottospazio, è necessario e sufficiente che sia non vuoto.

Consideriamo le matrici del sistema che definisce S:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $r(B) = r(C) = 2$, da cui, per il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli, $S \neq \emptyset$ ed è quindi un sottospazio per ogni k. Inoltre

$$\dim S = \dim A - r(B) = 4 - 2 = 2.$$

Invece $T_k = S_{Q,W_k}$ è un sottospazio, per definizione, per ogni k e

$$\dim T_k = \dim W_k = r(\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{cases} 2 & \text{se } k \neq \pm 1 \\ 1 & \text{se } k = \pm 1 \end{cases}.$$

(b) Essendo $\dim T_k \leq \dim S$ si ha che, se fossero paralleli, allora comunque $giac(T_k) \subseteq giac(S)$. Ma il vettore $e_1 + ke_2$ che ha coordinate $(1, k, 0, 0)$ non è mai soluzione del sistema omogeneo che da la giacitura di S

$$giac(S) : \begin{cases} X + Y - Z = 0 \\ X + W = 0 \end{cases}$$

in quanto la seconda equazione darebbe $1 + 0 = 0$. Pertanto non esistono valori di k per i quali S e T_k sono paralleli.
Per verificare se sono incidenti o sghembi, calcoliamo $S \cap T_k$ e per questo scriviamo prima le equazioni parametriche di T_k. Si ha

$$T_k : \begin{cases} X = 1 + t + ku \\ Y = kt + u \\ Z = 0 \\ W = 2 \end{cases}, t, u \in \mathbb{R} \text{ se } k \neq \pm 1 \text{ e } T_k : \begin{cases} X = 1 + t \\ Y = kt \\ Z = 0 \\ W = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ se } k = \pm 1.$$

Sostituiamo ora nelle equazioni di S.
Se $k \neq \pm 1$ si ha

$$\begin{cases} 1 + t + ku + kt + u = 1 \\ 1 + t + ku + 2 = 0 \end{cases}$$

che ha una sola soluzione $t = \frac{3}{k-1}, u = \frac{3}{1-k}$. Dunque $S \cap T_k$ è un punto.
Se $k = \pm 1$ si ha

$$\begin{cases} 1 + t + kt = 1 \\ 1 + t + 2 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t = -3 \\ -3(1 + k) = 0 \end{cases}$$

che ha una sola soluzione se e solo se $k = -1$. Dunque $S \cap T_k$ è un punto se $k = -1$ ed è vuoto se $k = 1$.

Concludiamo che S e T_k sono incidenti se $k \neq 1$ e sghembi se $k = 1$.
(c) Se esiste un iperpiano H contenente S e T_k allora, essendo H di dimensione 3 si hanno i seguenti casi possibili (usando quanto trovato in (b)):
- se $k \neq \pm 1$ allora S e T_k sono due piani che si intersecano in un punto in uno spazio di dimensione 3, e questo sappiamo non essere possibile;
- se $k = 1$ allora S è un piano, T_1 è una retta, non sono paralleli e non si intersecano, in uno spazio di dimensione 3; di nuovo questo sappiamo non essere possibile.
Allora se H esiste si ha che $k = -1$. D'altro canto se $k = -1$ allora S è un piano, T_{-1} è una retta, non sono paralleli e si intersecano in un punto e questo determina uno spazio di dimensione 3 che li contiene, precisamente $S_{Q,giac(S)+W_{-1}}$. In coordinate è facile vedere che H ha equazione $X + Y - Z = 1$.
Dunque H esiste se e solo se $k = -1$. ■

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $F : V \to V$ un endomorfismo di V. Supponiamo che esiste un autovalore λ di F con molteplicità geometrica $n - 1$.
(a) Dimostrare che se F non è iniettivo e $\lambda \neq 0$ allora F è diagonalizzabile.
(b) Determinare, in termini di autovalori di F, una condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità di F.

SOLUZIONE:

(a) Essendo F non iniettivo, esiste $v \in N(F), v \neq 0$, dunque v è un autovettore con autovalore 0. Ora $\lambda \neq 0$, dunque gli autovalori di F sono $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 0, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ e quindi, per il teorema che caratterizza la diagonalizzabilità di F, si ha

$$n = (n-1) + 1 \leq mg(\lambda) + mg(0) + mg(\lambda_3) + \ldots + mg(\lambda_k) \leq n$$

quindi vale l'uguaglianza e F è diagonalizzabile (si osservi inoltre che non ci sono altri autovalori oltre a λ e 0, cioè $k = 2$).
(b) Sia $s = ma(\lambda)$. Allora $P_F(T) = (T - \lambda)^s Q(T)$ con $Q(T)$ polinomio di grado $n - s$. Ora $s = ma(\lambda) \geq mg(\lambda) = n - 1$, dunque ci sono due possibilità: $s = n$ e $s = n - 1$. Nel primo caso F non ha altri autovalori oltre λ e non è diagonalizzabile. Nel secondo caso $Q(T)$ ha grado 1 e quindi ha una radice $\lambda' \neq \lambda$ di molteplicità algebrica (e quindi anche geometrica) 1. Se ne deduce che non ci sono altri autovalori e che F è diagonalizzabile dato che $mg(\lambda) + mg(\lambda') = n$.

Pertanto F è diagonalizzabile se e solo se possiede un autovalore diverso da λ. ■