UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2015-2016

Seconda prova di esonero

TESTO

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $v = -e_1 + e_3$. Sia F un endomorfismo di V tale che v è autovettore di F con autovalore k e

$$F(e_1) = e_1 + v, F(e_2 + e_3) = e_3 - e_4, F(e_3 + e_4) = e_1 + ke_4.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Sia S il sottospazio con le seguenti equazioni

$$S : \begin{cases} X + Y - Z = 1 \\ X + W = 0 \end{cases}$$

e sia T_k il sottospazio passante per il punto $Q = Q(1, 0, 0, 2)$ e di giacitura $W_k =< e_1 + ke_2, ke_1 + e_2 >$.

(a) Determinare i valori di k per i quali S e T_k sono sottospazi affini di A e, in tal caso, calcolare la loro dimensione.

(b) Determinare per quali k si ha che S e T_k sono paralleli, incidenti o sghembi.

(c) Determinare per quali k esiste un iperpiano H tale che $S \subseteq H$ e $T_k \subseteq H$.

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $F : V \to V$ un endomorfismo di V. Supponiamo che esiste un autovalore λ di F con molteplicità geometrica $n - 1$.

(a) Dimostrare che se F non è iniettivo e $\lambda \neq 0$ allora F è diagonalizzabile.

(b) Determinare, in termini di autovalori di F, una condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità di F.