Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE110 - Geometria 1 - Tutorato X

DOCENTE: ANGELO FELICE LOPEZ
TUTORE: A.MAZZOCCOLI, K.CHRIST

1. Si scrivano le equazioni del piano Π soddisfacente le seguenti proprietà:

   • passante per il punto $A = (2, 2, 0)$ e parallelo ai vettori $v = (6, 1, 6)$ e $w = (1, 2, 3)$

   • passante per i punti $B = (0, 0, 1)$ e $C = (2, 3, 1)$ e parallelo a $v = (2, 1, 2)$

   Soluzione:
   • In forma parametrica si ottiene : $(2, 2, 0) + t_1(6, 1, 6) + t_2(1, 2, 3)$.
   • Analogamente: $(0, 0, 1) + t_1(2, 3, 0) + t_2(2, 1, 2)$.

2. Rappresentare con equazioni parametriche e cartesiane le seguenti rette:
   • passante per il punto $A = (1, 2, 1)$ e parallela alla retta $s : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2y + z = -2 \end{cases}$
   • passante per il punto $B = (1, 2, 1)$ e parallela ai piani $\Pi_1 : 2x + 2y = 2$ e $\Pi_2 : 2y - 3 = 0$
   Soluzione:
   • s in forma parametrica è data da $(1, 0, -2) + t(0, 1, -2)$. Quindi $(1, 2, 1) + t(0, 1, -2)$ dà l'equazione parametrica e da questa segue l'equazione cartesiana, per esempio: $x = 1, z = 5 - 2y$.
   • L'equazioni di Π_1 e Π_2 insieme danno l'equazione di una retta s (loro intersezione) e troviamo la retta passante per B parallela a quella retta. Quindi, come prima, troviamo la giacitura di s, che è $t(0, 0, 1)$. Quindi la forma parametrica è data da $(1, 2, 1) + t(0, 0, 1)$ e la forma cartesiana per esempio è data da : $x = 1, y = 2$.

3. In $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ si scriva l'equazione del piano Γ passante per i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 1, 1)$ e $C = (0, 1, 1)$ e l'equazione del piano Δ contenente le rette
   $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 11 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ y - 4z + 8 = 0 \end{cases}$
   Soluzione: Tutorato 8 2013/2014, esercizio 3.

4. Si consideri lo spazio affine $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$.
   Siano r e s le rette di equazione cartesiana $r : \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$

   • Dopo aver determinato le equazioni parametriche di entrambe, dire se sono parallele , incidenti o sghembe.

   • Determinare le equazioni della retta t complanare con r e s e passante per $P = (1, 0, 1)$

   • Determinare le equazioni della retta q passante per il punto $Q = (1, 0, 0)$ e parallela al vettore $v = (2, -2, 8)$

   • Dire se t e q sono parallele, incidenti o sghembe.

   Soluzione:
   • Per r fissiamo $y = t$ e otteniamo $x = -2t - 1$ e $z = t + 1/3$. Analogamente per s

otteniamo $x = -1$, $y = 1/3$ e $z = t$. Quindi le giaciture sono $(-2, 1, 1)$ e $(0, 0, 1)$ e quindi non sono parallele. Sostituendo $x = -1$ e $y = 1/3$ nell'equazione $x + 2y + 1 = 0$ si vede che sono sghembe.
• La retta che cerchiamo sarà contenuta nell'intersezione dei due piani contenente P e r e s, rispettivamente. Iniziamo il calcolo scegliendo due punti nelle rette r e s. Nella forma parametrica otteniamo per esempio: $(1, 0, 1)+t_1((-1, 0, 1/3)-(1, 0, 1))+t_2((-3, 1, 4/3)-(1, 0, 1)) = (1, 0, 1)+t_1(-2, 0, -2/3)+t_2(-4, 1, 1/3)$ e $(1, 0, 1)+v_1(-2, 1/3, -1)+v_2(-2, 1/3, 0)$. Quindi in forma cartesiana i piani sono dati da $3z = 2 + x + 5y$ e $x = 1 - 6y$, che insieme danno quindi l'equazione cartesiana della rette che cerchiamo.
• L'equazione parametrica è data da $(1, 0, 0) + t(2, -1, 8)$.
• L'equazione parametrica di t è $(1, 0, 1) + v(-6, 1, -1/3)$, quindi non sono parallele. Per avere un'intersezione, dobbiamo avere $1 + 2t = 1 - 6v$, $-t = v$ e $8t = 1 - 1/3v$, che non è compatibile e quindi sono sghembe.

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio affine $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ siano s e r_k le due rette con le seguenti equazioni :

$$s : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \quad , r_k : \begin{cases} x = u - 1 \\ y = k \\ z = 2u \end{cases} \qquad u \in \mathbb{R}$$

• Determinare se esiste un k tale che s e r_k siano parallele.

• Determinare per quali k si ha che s e r_k siano incidenti.

• Sia k tale che s e r_k siano incidenti. Scrivere le equazioni di tutte le rette t in $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ tali che t e s siano complanari, t e r_k siano complanari, ma t, s ed r_k non siano contenute nello stesso piano.

Soluzione: Appello A 2011/12, esercizio 5.

6. Verificare se le seguenti applicazioni siano lineari e si determinino nucleo e immagine:
• $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(x, y, z) \to (2z - x, x + y, x + 2y + 2z)$
• $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ $(x, y) \to (x - 2y, 2x + y, 5y, 3x - y)$
• $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $(x, y, z) \to (x + y - z, x - y + z)$
Soluzione:
• $\alpha F(x, y, z) = \alpha(2z - x, x + y, x + 2y + 2z) = (2\alpha z - \alpha x, \alpha x + \alpha y, \alpha x + 2\alpha y + 2\alpha z) = F(\alpha(x, y, z))$ dove $\alpha \in \mathbb{R}$. $F(x, y, z)+F(x', y', z') = (2z-x, x+y, x+2y+2z)+(2z'-x', x'+y', x'+2y'+2z') = (2(z+z')-(x+x'), (x+x')+(y+y'), (x+x')+2(y+y')+2(z+z')) = F(x + x', y + y', z + z')$ e quindi F è lineare (o basta osservare che F sia lineare in tutte le coordinate; e soprattutto che $F(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$). Il nucleo per definizione è dato da $2z - x = 0, x + y = 0, x + 2y + 2z = 0$. Quelli sono dipendenti, quindi basta prendere $2z - x = 0$ e $x + y = 0$. Se prendiamo due vettori indipendenti, non contenuti nel nucleo, la sua immagine genera l'immagine di F. Per esempio, otteniamo $F(1, 0, 0) = (-1, 1, 1)$ e $F(0, 1, 0) = (0, 1, 2)$ e quindi l'immagine è data (in forma parametrica) da $t_1(-1, 1, 1) + t_2(0, 1, 2)$.
• Si verifica come prima che F sia lineare. Il nucleo è dato da $x = 0$ e $y = 0$ (quindi è iniettiva) e l'immagine da $t_1(1, 2, 0, 3) + t_2(-2, 1, 5, -1)$.
• Si verifica come prima che F è lineare. Il nucleo è dato da $x + y - z = 0$ e $x - y + z = 0$, che sono indipendenti. Quindi F è suriettiva e l'immagine è tutto $\mathbb{R}^2$.