Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE110 - Geometria 1 - Tutorato XI

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutore: A.Mazzoccoli, K.Christ

1. Sia f l'operatore di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rispetto alla base canonica è:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Calcolare la dimensione del $Ker(f)$ e la dimensione dell' $Im(f)$.
Soluzione: La dimensione dell' immagine è uguale al rango della matrice. Si calcola che è quattro, quindi $dim(Im(f)) = 4$. Poichè $dim(\mathbb{R}^4) = dim(Im(f)) + dim(Ker(f))$ otteniamo $dim(Ker(f)) = 0$.

2. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come:
$F(x, y) = (x - y, 2x - \frac{1}{3}y, 2x + y)$
Sia inoltre $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come:
$G(x, y, z) = (-x + z, \frac{x}{2} + y - 3z)$
Le applicazioni F e G sono iniettive e/o suriettive?
Soluzione: Tra le equazioni che definiscono F ogni coppia è indipendente (quindi la matrice corrispondente ha rango due). Quindi $ker(F) = 0$ e F è iniettiva. F non può essere suriettiva perchè la dimensione del codominio è più grande rispetto a quella del dominio.
G non puo essere iniettiva poichè la dimensione del dominio è più grande rispetto a quella del codominio. È suriettiva perchè le due equazioni sono indipendenti.

3. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbb{R}^2$ nel seguente modo:
$T(e_1) = (1, 2, 1)$,$T(e_2) = (4, 0, 1)$.
• Esplicitare $T(x, y)$
• Stabilire se $(0, 0, 0), (3, 4, 1), (3, -2, 0)$ appartengono ad $Im(T)$
Soluzione:
• $T(x, y) = (x + 4y, 2x, x + y)$.
• $T(0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(x, y) = (3, 4, 1)$ non è compatibile e $T(-1, 1) = (3, -2, 0)$.

4. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da $T(x, y, z) = (2x + z, -2x + y + z, y + 2z)$
•Determinare una base del $Ker(T)$ e $Im(T)$ e la loro dimensione, dedurre se l'applicazione è iniettiva e/o suriettiva
• Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ tutti i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$
Soluzione:
• $(2x + z) + (-2x + y + z) = y + 2z$, i.e. sono dipendenti. $2x + z$ e $y + 2z$ per esempio non sono dipendenti e quindi $dim(Im(T)) = 2$ e $dim(Ker(T)) = 1$. Un elemento del $Ker(T)$ sarà quindi una base se è diverso da zero, possiamo scegliere per esempio $(1, 4, -2)$. Per la base dell' immagine prendiamo due vettori indipendenti non contenuti nel $ker(T)$, calcoliamo la loro immagine e verificiamo che sono ancora indipendenti. Per esempio: $T(1, 0, 0) = (2, -2, 0)$ e $T(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$, che sono indipendenti.
• Abbiamo visto che nell'immagine di T la somma delle prime due coordinate deve essere la terza coordinata. Quindi l'unico k è $k = 6$, per cui otteniamo $v = (t, 4t, 3 - 2t)$ (che ha senso, visto che la dimensione del nucleo è uno, e in generale la dimensione di una fibra è uguale alla dimensione del nucleo, che è la fibra preimmagine dello zero).

5. Siano $v = \{(1,1,-1),(1,-1,-1),(-1,-1,-1)\}$ e
$w = \{(1,0,1,-1),(-1,1,1,0),(0,0,1,-1),(1,0,-1,-1)\}$ due basi di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ rispettivamente e siano F,G,H,I le seguenti applicazioni lineari:
$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $F(x,y,z) = (x+z, x+2y, 2x+3y+z)$
$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ $G(x,y,z) = (x+z, x+y+z, x-y+2z, 2x+y+2z)$
$H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $H(x,y,z,t) = (x+2z+t, x-y-z+t, y-t)$
$I : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $I(x,y,z,t) = (x+z+t, 2x+y+t, x-y-2z+t, y-z+t)$
Determinare le matrici $M_v(F)$,$M_{w,v}(G)$,$M_{v,w}(H)$,$M_w(I)$ associate a tali applicazioni.
Soluzioni: Usiamo il fatto che per $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ abbiamo $M_{w,v}(T) = (M_{e,w}(Id_n))^{-1} M_{e,e}(T) M_{e,v}(Id_m)$, dove $M_{e,e}(T)$ denota la matrice associata a T rispetto alle base canonica in $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Otteniamo quindi:

$$M_v(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{w,v}(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{v,w}(H) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_w(I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Poi, se è necessario, si calcola il prodotto.