Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE110 - Geometria 1 - Tutorato XII

DOCENTE: ANGELO FELICE LOPEZ
TUTORE: A.MAZZOCCOLI, K.CHRIST

1. Siano A e B due matrici simili, si dimostri che:
• $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$
• $\text{tr}(A)$=$\text{tr}(B)$
• A^n e B^n sono simili
Soluzione: A e B sono simili, quindi esiste una matrice invertibile C con $A = CBC^{-1}$.
• Otteniamo $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = det(CBC^{-1} - \lambda I) = det(CBC^{-1} - \lambda CIC^{-1}) = det(C(B - \lambda I)C^{-1}) = det(B - \lambda I) = P_B(\lambda)$.
• $tr(A) = tr(CBC^{-1}) = tr(C(BC^{-1})) = tr((BC^{-1})C) = tr(B)$.
• $C^n A^n (C^{-1})^n = (CAC^{-1})^n = B^n$.

2. Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici :
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Quali sono diagonalizzabili?
Soluzione:
Iniziamo con $det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 1) - (2 - \lambda) = 0$ e vediamo direttamente che un autavalore è dato da $\lambda_1 = 2$. Poi dividiamo per $2 - \lambda$ e otteniamo $(2 - \lambda)^2 - 2 = 0$, che ha soluzione $\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$. Per trovare gli autovettori dobbiamo solvere i sistemi lineari corrispondenti, per esempio per λ_1 abbiamo $2x + y = 2x$, $x + 2y + z = 2y$ e $y + 2z = 2z$, che da il autospazio unodimensional corrispondente a λ_1. Una base è per esempio $v_{\lambda_1} = (1, 0, -1)$. Analogamente si trova per λ_2 e λ_3, $v_{\lambda_2} = (1, \sqrt{2}, 1)$ e $v_{\lambda_3} = (1, -\sqrt{2}, 1)$. Quindi A è diagonalizzabile.
Abbiamo $det(B - \lambda I) = -(1 - \lambda)((2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 2) = 0$. Quindi come prima abbiamo $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_{2,3} = (1 \pm \sqrt{17})/2$. Si risolvono i sistemi lineari e si ottiene: $v_{\lambda_1} = (0, 1, 0)$, $v_{\lambda_2} = (1, 0, (-3 + \sqrt{17})/4$ e $v_{\lambda_3} = (1, 0, (-3 - \sqrt{17})/4)$. La matrice è diagonalizzabile.
Abbiamo $det(C - \lambda I) = (1 - \lambda)(1 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 1)$ e quindi autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$. Gli autovettori sono dati da $v_{\lambda_1} = (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)$ e $v_{\lambda_2} = (0, 1, 1, 0)$. Poiché la somma delle dimensioni dei autospazi è minore della dimensione dello spazio, C non è diagonalizzabile.

3. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ associato alla matrice $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
• Determinare gli autovalori di f e le relative molteplicità.
• Determinare gli autospazi di f e trovare , se esiste, una base B di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.
• Calcolare una matrice P invertibile tale che $P^{-1}M(f)P$ sia diagonale
Soluzione:
• Abbiamo $det(M(f) - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità uno e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità due.
• Risolvendo i sistemi lineari corrispondenti agli autovalori si ottiene $v_{\lambda_1} = (1, 1, 1)$ e $v_{\lambda_2} = (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, che dà una base di $\mathbb{R}^3$.
• Abbiamo già una base v di autovettori, quindi possiamo prendere $P = M_{e,v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
   - Dire se è invertibile e in caso affermativo determinare A^{-1}.
   - Calcolare gli autovalori e gli autovettori di A.
   - Determinare P tale che $P^{-1}AP = D$ dove D è diagonale.

   Soluzione:
   - Quando abbiamo trovato P e D, l'inversa è data da $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. Altrimenti si usa Gauss-Jordan per calcolarla.
   - Abbiamo $det(A-\lambda I) = (2-\lambda)((5-\lambda)(2-\lambda)-4)+2(-2(2-\lambda)+2)-(-4+(\lambda-5)) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7$. Per ottenere zero $\lambda_1 = 1$ dà la prima soluzione. La divisione per $(\lambda - 1)$ dà $-\lambda^2 + 8\lambda - 7$ con zeri 1 e 7, quindi $\lambda_2 = 7$. Per tali autovalori si ottiene poi una base di V_{λ_1} per esempio con $(2,1,0)$ e $(1,0,1)$, e di V_{λ_2} con $(-1,2,1)$.
   - Abbiamo quindi $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Siano $k \in \mathbb{R}^4$ $v_1 = (1,-1,0,0)$,$v_2 = (1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $v_1 \in N(F)$, $v_2 \in N(F)$,$F(E_2) = E_2 + kE_4$, $F(E_4) = E_2 + v_1$ dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$
   - Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F
   - Trovare la dimensione degli autospazi di F
   - Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile

   2011/12, esonero 2, esercizio 1.