Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE110 - Geometria 1 - Tutorato XIII

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutore: A.Mazzoccoli, K.Christ

1. Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile sul campo dei reali.

   Trovare una matrice P tale che $A = PDP^{-1}$
   Soluzione:
   il polinomio caratteristico $P(\lambda) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$ quindi gli autovalori sono $\lambda = 3$ (molteplicità 2) e $\lambda = -1$ (molteplicità 1).
   Gli autovettori rispettivi sono (-1,1,0), (-2,0,1) e (0,1,0) , quindi risulta che A è diagonalizzabile.
   Quindi la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Dire se la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile esplicitando gli autovalori e i rispettivi autovettori della matrice
   Soluzione :
   Il polinomio caratteristico é $P(\lambda) = (2-\lambda)((2-\lambda)(2-\lambda)-2)$ che ha come radici $2{,}2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$, quindi la mattrice risulta diagonalizzabile poichè ogni autovalore ha molteplicità algebrica 1.
   Gli autovettori rispettivamente sono (-1,0,1),(-$\sqrt{2}/2, 1, -\sqrt{2}/2$) e ($\sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2$)

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia A una matrice a coefficienti in $\mathbb{R}$
   $A = \begin{pmatrix} k-1 & k-2 & 2-k \\ 0 & 1 & 0 \\ k-2 & k-2 & 3-k \end{pmatrix}$
   Trovare gli autovalori della matrice A al variare del parametro k

   Trovare una base per gli autospazi

   Stabilire quindi se A è diagonalizzabile e trovare una matrice M tale che $M^{-1}AM = B$ dove B è diagonale
   Soluzione:
   per questo caso bisogna ragionare come nell'esercizio 4, e per trovare la matrice M basterà fare come fatto nell'esercizio 1

4. Sia $t \in \mathbb{R}$ e sia $A = \begin{pmatrix} 3 & t+4 & 5 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}$.

   Trovare gli autovalori della matrice al variare di t

   Trovare una base per gli autospazi

   Stabilire quindi se A è diagonalizzabile
   Soluzione:
   il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = (2t-\lambda)(\lambda^2 + t - 5)$.

Gli autovalori sono quindi $\lambda = 2t$, $\lambda = \sqrt{5-t}$ e $\lambda = -\sqrt{5-t}$.
Discutiamo ora al variare di t cosa succede.
Notiamo che se t>5 allora avremo solo come autovalore $\lambda = 2t$ risulterebbe quindi la molteplicità algebrica <molteplicità geometrica, quindi la matrice risulta non diagonalizzabile per tali t.
Stesso discorso lo otteniamo pet t=5.
Se invece t>5 otteniamo tutti autovalori distinti , quindi la matrice risulta diagonalizzabile.
Gli autovettori rispettivi sono $(((t+4)(-8+2t)/(-4t^2+t+13)+1, (-8+2t)/(-4t^2+t+13, 1))$,$(-3(1+\sqrt{5-t}), 1, 0)$ e $(3-(1-\sqrt{5-t}, 1, 0))$ che ci danno una base dei rispettivi autospazi.