Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE110 - Geometria 1 - Tutorato I

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutore: A.Mazzoccoli, K.Christ

1. Dare un esempio di due matrici quadrate non nulle di ordine 2 e 3 il cui prodotto sia una matrice nulla.

   Soluzione: Per esempio $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Sia $A \in M_2(\mathbb{R})$ con $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix}$, calcolare:

   $(a)\, A^2 \qquad (b)\, 3A^3 - \frac{1}{2}A + A^0 \qquad (c)\, (A^t)^2 + AA^t + A^tA - 3I_2$

   Soluzione:

   (a) $A^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yv \\ xz + zv & v^2 + yv \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
(b) \quad 3A^3 - \frac{1}{2}A + A^0 &= 3\begin{pmatrix} x^3 + 2xyz + zyv & x^2y + y^2z + vxy + yv^2 \\ x^2z + xzv + v^2z + yvz & yxz + yzv + v^3 + yv^2 \end{pmatrix} \\
&\quad -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3(x^3 + 2xyz + zyv) - 0.5x + 1 & 3(x^2y + y^2z + vxy + yv^2) - 0.5y \\ 3(x^2z + xzv + v^2z + yvz) - 0.5z & 3(yxz + yzv + v^3 + yv^2) - 0.5v + 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(c) \quad (A^t)^2 + AA^t + A^tA - 3I_2 &= 3\begin{pmatrix} x^2 + yz & xz + vz \\ xy + yv & yz + v^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & xz + yv \\ xz + yv & z^2 + v^2 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} x^2 + z^2 & xy + zv \\ xy + zv & y^2 + v^2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 + z^2 + yz - 3 & 2xz + 2vz + xy + yv \\ 2xy + 2yv + xz + zv & 3v^2 + y^2 + z^2 + yz - 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3. Svolgere il prodotto tra le seguenti matrici (AB e BA)

   $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$

   Soluzione: $AB = \begin{pmatrix} 4/9 & 5/9 & 11/9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5/9 & 13/9 & 7/9 \end{pmatrix}$ e $BA = \begin{pmatrix} -4/9 & -3/9 & -3/9 \\ 4/9 & 12/9 & 12/9 \\ 7/9 & 3/9 & 3/9 \end{pmatrix}$.

4. Una matrice quadrata A si chiama nilpotente se esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $A^k = 0$ (matrice nulla). Mostrare che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ è nilpotente di ordine 3 (i.e. $A^3 = 0$).
Dimostrare che $A \in M_n(K)$ nilpotente non è invertibile.
Soluzione: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ e $A^3 = 0$. Supponiamo per assurdo, che $A^k = 0$ e $AB = I_n$. Allora abbiamo $A = A^k B^{k-1} = 0B^{k-1} = 0$. Quindi $0 = 0B = AB = I_n$, una contradizione.

5. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $ad - bc \neq 0$. Dimostrare che allora A è invertibile con $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Una matrice A si chiama involutoria se A è invertibile e $A = A^{-1}$. Quand'è $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ involutoria?
Soluzione: $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = I_2$.
Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Se $ad - bc = -a^2 - bc = 0$, abbiamo $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{pmatrix} = 0$.
Quindi in questo caso A e nilpotente e come abbiamo dimostrato nel 4. pertanto non è invertibile e specialmente non involutaria.
Altrimenti, calcoliamo $A = A^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \frac{1}{-a^2-bc} \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow a^2 + bc = 1$.
Insomma A è involutaria se e solo se $a^2 + bc = 1$.

6. Dare un esempio di una matrice quadrata A tale che A considerato come un elemento di $M_n(\mathbb{R})$ è invertibile ma considerato come un elemento di $M_n(\mathbb{Z})$ non è invertibile. È possibile che una matrice invertibile in $M_n(\mathbb{Z})$ non è invertibile in $M_n(\mathbb{R})$?
Soluzione: Per esempio $2I_n$. In $M_n(\mathbb{R})$ l'inverso è dato da $1/2I_n$, che non è un elemento di $M_n(\mathbb{Z})$.
Ogni matrice invertibile in $M_n(\mathbb{Z})$ è anche invertibile in $M_n(\mathbb{R})$, perché $M_n(\mathbb{Z}) \subset M_n(\mathbb{R})$ e quindi l'inverso dentro $M_n(\mathbb{Z})$ sarà anche un elemento di $M_n(\mathbb{R})$.

7. Dimostrare che se $A \in M_n(K)$ allora $A + A^t$ è simmetrica e $A - A^t$ è antisimmetrica.
Soluzione: Se scriviamo $(A)_{ij}$ per l'entrata i,j di A abbiamo:
$(A + A^t)_{ij} = (A)_{ij} + (A)_{ji} = (A + A^t)_{ji}$
$(A - A^t)_{ij} = (A)_{ij} - (A)_{ji} = -(A - A^t)_{ji}$

8. Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Si calcola se $AA^t = I_3$ e si vede che A e C sono ortogonali.

9. Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_2(\mathbb{R})$)

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici.

Soluzione: Rispetto alla somma: $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' & y+y' \\ 0 & z+z' \end{pmatrix} \in I$

Rispetto al prodotto: $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' & xy'+yz' \\ 0 & zz' \end{pmatrix} \in I.$