Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE110 - Geometria 1 - Tutorato II

DOCENTE: ANGELO FELICE LOPEZ
TUTORE: A.MAZZOCCOLI, K.CHRIST

1. Determinare l'inversa delle seguenti matrici attraverso operazioni elementari

   • $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ • $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

   Soluzione:

   • $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$ dove abbiamo usato le operazioni $R_2 \to R_2 - 2R_1$ e $R_2 \to -1/2R_2$

   Quindi abbiamo $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

   • Analogamente si trova $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 11 & -8 & -10 \\ 7/2 & -5/2 & -7/2 \end{pmatrix}$, per esempio in questo modo:

   Dopo aver usato $R_2 \to R_2 - 7R_1$, $R_1 \to R_1 - R_3$, $R_3 \to R_3 + 1/7R_2$ abbiamo:

   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 1/7 & 0 & 1/7 & 0 \end{array}\right).$$

   Poi usando $R_3 \to R_3 - 1/5R_1$, $R_1 \to R_1 + 35/2R_3$, $R_2 \to R_2 + 385R_3$ otteniamo:

   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & -5/2 & 5/2 & 5/2 \\ 0 & -7 & 0 & -77 & 56 & 70 \\ 0 & 0 & -2/35 & -1/5 & 1/7 & 1/5 \end{array}\right).$$

   Finalmente con $R_1 \to 1/5R_1$, $R_2 \to -1/7R_2$, $R_3 \to -35/2R_3$ arriviamo alla soluzione.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & k & k \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $k \in \mathbb{R}$, determinare per quali k la matrice A risulta invertibile e calcolare l'inversa per tali k.

   Soluzione:

   Troviamo l'inversa come nel esercizio 1, i.e. applicando operazioni elementari alla matrice

   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+k & 2k & k & 0 & 1 \end{array}\right).$$

   Dopo aver applicato $R_3 \to R_3 + kR_1$, $R_3 \to R_3 - R_2$, $R_2 \leftrightarrow R_3$ (scambio di righe),

$R_3 \to R_3 - kR_2$ arriviamo a:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & k & -1 & 1 \\ 0 & k & k & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Poi usando $R_3 \to 1/(k-k^2)R_3$, $R_1 \to R_1 - 2R_3$, $R_2 \to R_2 - kR_3$, $R_1 \to -R_1$, $R_1 \to R_1 + R_2$ otteniamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -k/(k-k^2) & 2/(k-k^2) & -k/(k-k^2) \\ 0 & 1 & 0 & k^2/(k-k^2) & -2k/(k-k^2) & k/(k-k^2) \\ 0 & 0 & 1 & -k^2/(k-k^2) & 1+k/(k-k^2) & -k/(k-k^2) \end{array}\right).$$

Si nota che la matrice $\begin{pmatrix} -k/(k-k^2) & 2/(k-k^2) & -k/(k-k^2) \\ k^2/(k-k^2) & -2k/(k-k^2) & k/(k-k^2) \\ -k^2/(k-k^2) & 1+k/(k-k^2) & -k/(k-k^2) \end{pmatrix}$ è un elemento di $M_n(\mathbb{R})$ se e solo se $k \neq 0, 1$, in tale caso A risulta invertibile.

(Questa soluzione formalmente ha il problema che l' operazione $R_3 \to 1/(k-k^2)R_3$ è ben definita soltanto se $k \neq 1, 0$. Quando potremo utilizzare la nozione di rango di una matrice per determinare se la matrice è invertibile allora la soluzione diventerà più pulita.)

3. Si dimostri che l'inversa di una matrice simmetrica è anch'essa simmetrica.

   Soluzione: Dimostriamo prima che, se A è invertibile (non necessariamente simmetrica), abbiamo $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. Infatti $I = I^t = (AA^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t$, dove abbiamo usato $(AB)^t = B^t A^t$. Adesso, poichè l'inversa è unica, segue che $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
   Se A è simmetrica questo ci da $A^{-1} = (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, quindi anche A^{-1} è simmetrica.

4. Si scrivano le seguenti matrici come prodotto di matrici elementari:
   - $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
   - $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   Soluzione: L'idea è la seguente: Ad ogni operazione elementare corrisponde una matrice elementare, con cui moltiplicheremo la matrice A. Troviamo l'inversa di A usando le operazioni elementari, facciamo quindi le seguenti cose: Iniziamo con $AA^{-1} = I$ e moltiplichiamola con matrice elementare fino a rendere A l'identita: $A^{-1} = (M_1 \dots M_n)AA^{-1} = (M_1 \dots M_n)$. Quindi $A = (M_1 \dots M_n)^{-1} = M_n^{-1} \dots M_1^{-1}$. Poichè l'inversa di una matrice elementare è una matrice elementare, questo ci dará la decomposizione in matrici elementari.

   Per A otteniamo che per trovare l'inversa possiamo usare $R_2 \to R_2 - 3R_1$, $R_1 \to R_1 + R_2$, $R_2 \to 1/2R_2$. Per quello che abbiamo detto prima abbiamo quindi

   $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ e

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Analogamente con $R_2 \to R_2 - 2R_1$, $R_1 \to R_1 + 2/3R_2$ e $R_2 \to -1/3R_2$, si trova $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Si determinino se esistono tutte le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari utilizzando il metodo di Gauss Jordan:

$$\begin{cases} X+Y-Z=1 \\ 2X+2Y+Z=0 \\ X+Y+2Z=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2X-2Y+Z+4T=0 \\ X-Y-4Z+2T=0 \\ -X-Y+3Z-2T=0 \\ 3X-3Y+Z+6T=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X+Z=0 \\ X+Y+Z=0 \\ Y+6Z=1 \end{cases}$$

Soluzione:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{array}\right)$$

Quindi le soluzioni sono date da $Z = -2/3$ e $X = 1/3 - Y$.

Analogamente si determina nel secondo caso che soluzioni sono date da $Y = Z = 0$ e $X = -2T$.

Nel terzo caso $Z = 0$, $Y = 1$ e $X = -1$.

6. Discutere al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi utilizzando il metodo di Gauss Jordan:

$$\begin{cases} kX-Y+Z=2 \\ X-kY+Z=3-k^2 \\ X-Y+kZ=k+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X+Y+Z=k \\ X+Y-Z=1 \\ 2X+Y+kZ=k+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} kX-Y-Z+3T=0 \\ 2X-kZ+2T=k+4 \\ kX+Y+T=-k \\ X+Y-Z=2 \end{cases}$$

Soluzione:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -k & 1 & 3-k^2 \\ 1 & -1 & k & k+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & k+1 \\ 1 & -k & 1 & 3-k^2 \\ k & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & k+1 \\ 0 & -k+1 & 1-k & 2-k^2-k \\ 0 & k-1 & 1-k^2 & 2-k^2-k \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & k+1 \\ 0 & -k+1 & 1-k & 2-k^2-k \\ 0 & 0 & 2-k^2-k & 4-2k^2-2k \end{array}\right)$$

Se $k^2 + k = 2$ abbiamo che per $k = 1$ le soluzioni sono date da $X = Y - Z + 2$ e per $k = -2$ da $X = 7Y - 1$ e $Z = 3Y$.

Se $k^2 + k \neq 2$ continuiamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & k+1 \\ 0 & -k+1 & 1-k & 2-k^2-k \\ 0 & 0 & 2-k^2-k & 4-2k^2-2k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & k+1 \\ 0 & -k+1 & 1-k & 2-k^2-k \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & k+1 \\ 0 & -k+1 & 0 & -k^2+k \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & k+1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Quindi l'unica soluzione in questo caso è $X = 1$, $Y = k$ e $Z = 2$.

Nel secondo caso abbiamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & k & k+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & -2 & 1-k \\ 0 & -1 & k-2 & 1-k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & -1 & 0 & (k-k^2)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (k-1)/2 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & k-k^2/2+1/2 \\ 0 & -1 & 0 & (k-k^2)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (k-1)/2 \end{array}\right).$$

Quindi l'unica soluzione è data da $X = k - k^2/2 + 1/2$, $Y = (k-k^2)/2$ e $Z = (k-1)/2$.

Nel terzo caso si determina analogamente che per $k = 3$ le soluzioni sono date da $X = -(5T+8)/8$, $Y = 7T/8$ e $Z = (T-12)/4$.

Per $k = 2$ non esiste una soluzione.

Per $k \neq 2, 3$ l'unica soluzione è data da $X = -(3k+8)/(2k-4)$, $Y = 7k/(4k-4)$, $Z = 0$ e $T = (k^2+5k)/(4k-4)$.