Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE110 - Geometria 1 - Tutorato III

DOCENTE: ANGELO FELICE LOPEZ
TUTORE: A.MAZZOCCOLI, K.CHRIST

1. Stabilire quali dei seguenti vettori sono linearmente indipendenti ,quali sono un sistema di generatori dello spazio e quali sono una base:
   In $\mathbb{R}^2$:
   • { $(2,\frac{-1}{3}),(-1,\frac{1}{6})$ }   • { (1,2),(11,$-7\sqrt{2}$), (-1,-1) }
   In $\mathbb{R}^3$:
   • { (1,1,3), (2,2,0) , (3,3,-3) }   • { (1,0,0),(1,1,1), (0,1,2),(-1,-2,-3) }
   In $\mathbb{C}^4$:
   • { (1,0,i,0), (i,0,i,0), (0,1,1,0), (0,i,0,i) }

   Soluzione:

   • $(2,\frac{-1}{3}) = -2(-1,\frac{1}{6})$ quindi sono dipendenti. Poiché la dimensione dello spazio è 2 essi non sono generatori. Non sono quindi una base.

   Tre vettori di $\mathbb{R}^2$ essendo in uno spazio due dimensionale sono sempre dipendenti. Sono generatori perchè $(1,2)$ e $(-1,-1)$ sono independenti. Non sono una base.

   • $-1(1,1,3)+2(2,2,0) = (3,3,-3)$, quindi sono dipendenti e poiché la dimensione dello spazio è 3 essi non sono generatori. Non sono una base.

   Poiché la dimensione dello spazio è 3 essi sono dipendenti. Se prendiamo $c_1(1,0,0)+c_2(1,1,1)+c_3(0,1,2) = (c_1+c_2, c_2+c_3, c_2+2c_3) = 0$ otteniamo $c_1+c_2=0$, $c_2+c_3=0$ e $c_2+2c_3=0$. Quindi $c_1=c_2=c_3=0$, risultano quindi generatori. Non sono una base.

   • Per $c_1(1,0,i,0)+c_2(i,0,i,0)+c_3(0,1,1,0)+c_4(0,i,0,i) = 0$ abbiamo per la quarta componente che $c_4=0$. Poi per la terza, $c_3=0$ e finalmente $c_1=c_2i$ e $c_1i=c_2i$. Quindi sono independenti. Per ragione della dimensione risultano anche generatori e una base.

2. Dati i seguenti vettori:
   $a=(1,3,2); b=(-2,k-6,k+4); c=(-1,k-3,k^2+k+1); d=(0,-2,k-1)$
   determinare i valori del parametro $k\in\mathbb{R}: \{a,b,c\}$ sono linearmente indipendenti.
   Posto $k=2$ determinare le componenti del vettore d rispetto alla base $\{a,b,c\}$

   Soluzione: Troviamo la dipendenza e l'indipendenza dei vettori attraverso la matrice dei tre vettori e utilizzando Gauss-Jordan. Essi sono indipendenti se e solo se esiste più di una soluzione:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & k-6 & k-3\\ 2 & k+4 & k^2+k+1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & k & k\\ 0 & k+8 & k^2+k+3\end{pmatrix}.$$

   Se $k=0$ esiste più di una soluzione. Altrimenti continuiamo:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & k & k\\ 0 & k+8 & k^2+k+3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & k^2-5\end{pmatrix}$$

Quindi i vettori sono dipendenti quando $k = 0$ o $k = \pm\sqrt{5}$.

Per determinare le componenti dobbiamo risolvere l' equazione $c_1 a + c_2 b + c_3 c = d$ con $k = 2$. Facciamolo usando un'altra volta Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 0\\ 3 & -4 & -1 & -2\\ 2 & 6 & 7 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & -2\\ 0 & 10 & 9 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -11\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 1 & -11\end{array}\right).$$

Vediamo che $9a + 10b - 11c = d$.

3. Vedere quali dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali:
• { (0,0,0) }
• $\{\ (t,t,t) : 0 < t < 1\ \}$
• $H_1 \cup H_2 \cup H_3 : H_i = \{\ (x_1, x_2, x_3) : x_i = 0\ \}$
• $\{\ (\ x, y, z\ ) : x + y - 5z = 0\ ,\ 2(x + y) = 0\ \}$

Soluzione:

• Sì, $a(0,0,0) + b(0,0,0) = (0,0,0)$.

• No, per esempio si consideri $2(0.5, 0.5, 0.5) = (1,1,1)$. • No, per esempio si consideri $(0,1,1) + (1,0,1) = (1,1,2)$. • Sì, lo spazio consiste nelle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

4. Dimostrare che :
$\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ con $U =< (1,0,\sqrt{5},0), (\sqrt{5},0,-1,0) >$ e $W =< (0,-2,0,3), (0,1,0,1) >$

Soluzione: Dalla definizione segue $U \oplus W =< (1,0,\sqrt{5},0), (\sqrt{5},0,-1,0) > \oplus < (0,-2,0,3), (0,1,0,1) >=< (1,0,\sqrt{5},0), (\sqrt{5},0,-1,0), (0,-2,0,3), (0,1,0,1) >$. Se dimostriamo che i vettori sono indipendenti abbiamo finito:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \sqrt{5} & 0\\ \sqrt{5} & 0 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & \sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & -6 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & \sqrt{5} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$ Quindi

i vettori sono indipendenti e generano $\mathbb{R}^4$.

5. Sia W_1 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $a = (1,1,-1), b = (2,-1,1)$ e sia W_2 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $c = (1,2,-2), d = (-1,-1,2)$.
Trovare $W_1 \cap W_2$ e una sua base.

Soluzione: Si determina come prima che a, b e c, d non sono dipendenti rispettivamente, che a, b, c sono dipendenti e che a, b, d non sono dipendenti. Quindi a, b, c, d generano $\mathbb{R}^3$,

a, b generano un sottospazio due dimensionale che contiene c ma non d. In altre parole $W_1 \cap W_2 =< c >$.

6. Dimostrare che $GL_n(K)$ non è un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$.

   Soluzione: Per $M \in GL_n(K)$, $0M = 0 \notin GL_n(K)$.

7. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, e sia $\{i, j, k\}$ una base di V. Siano $U =< i + j, i - j >$, $W =< j + k, j - k >$.
   Dimostrare che $V = U + W$, e che la somma non è diretta.

   Soluzione: Si dimostra che $i + j$, $i - j$ e $j + k$ sono indipendenti: se abbiamo $c_1(i + j) + c_2(i - j) + c_3(j + k) = 0$ otteniamo $(c_1 + c_2)i + (c_1 - c_2 + c_3)j + c_3k = 0$. Poiché i, j e k eranno indipendenti, segue che $c_1 + c_2 = c_1 - c_2 + c_3 = c_3 = 0$ e quindi $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Questo dimostra che U e W generano V. La somma non è diretta perché per esempio $(i + j) - (i - j) = 2j = (j + k) + (j - k)$.