Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE110 - Geometria 1 - Tutorato IV

DOCENTE: ANGELO FELICE LOPEZ
TUTORE: A.MAZZOCCOLI, K.CHRIST

1. Siano U e V due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2
• Provare che $U \cap V \neq < 0 >$
• Determinare tutte le possibili dimesioni di $U \cap V$ e costruire un esempio per ciascuna di esse
Soluzione: Usando la formula di Grassmann otteniamo che $dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U+V) = 4 - dim(U+V) \geq 1 > 0$ visto che, per la definizione della somma di sottospazi, al massimo $U + V = \mathbb{R}^3$. Al minimo $dim(U+V) = 2$ perché $dim(U+V) \geq dim(U)$. Quindi $dim(U \cap V)$ ha dimensione o 1 o 2, dove qualsiasi sottospazio $U \neq V$ da un esempio dove $dim(U \cap V) = 1$ e $dim(U \cap V) = 2$ se e solo se $U = V$.

2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$
• Provare che i sottinsiemi $B := \{X \in M_2(\mathbb{R}) : AX = XA\}$ e $C := \{X \in M_2(\mathbb{R}) : AX = -XA\}$ sono sottospazi vettoriali e trovare una base per ciascuno di essi.
• Trovare una base per $B + C$
• Data la matrice $D := \begin{pmatrix} 0 & h-2 \\ 0 & h-2 \end{pmatrix}$ stabilire per quali $h \in \mathbb{R}$ la matrice D appartiene al sottospazio vettoriale $B + C$

Soluzione:
• B contiene 0, perché $A0 = 0A = 0$. Per $X \in B$, abbiamo anche $A(kX) = k(AX) = k(XA) = (kX)A$, i.e. anche $kX \in B$. Per $X, Y \in B$, otteniamo $A(X+Y) = AX + AY = XA + YA = (X+Y)A$ e quindi anche $X + Y \in B$.Quindi, B è un sottospazio. Analogamente per C.
Se scriviamo $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in B$, otteniamo $AX = \begin{pmatrix} 6x_1 - 9x_3 & 6x_2 - 9x_4 \\ 4x_1 - 6x_3 & 4x_2 - 6x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 + 4x_2 & -9x_1 - 6x_2 \\ 6x_3 + 4x_4 & -9x_3 - 6x_4 \end{pmatrix} = XA$. Risolvendo quel sistema di equazioni lineari otteniamo $x_3 = -4/9x_2$ e $x_1 + 4/3x_2 - x_4 = 0$ (infatti, vedere che B é definito dalle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogeneo, é un altro modo per vedere che sia un sottospazio). In particolare, il sistema ha rango 2 e si vede che per esempio $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$ danno una base di B. Analogamente per C, otteniamo $x_1 = -x_4$ e $12x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 0$ e quindi per esempio $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ danno una base di C.
• Si vede che $dim(B \cap C) \geq 1$, osservando che A é nilpotente risulta quindi $A \in B$ e $A \in C$. Quindi poichè $dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$, la formula di Grassmann ci da $dim(B + C) \leq 3$. Poi, per esempio, B_1, C_1 e C_2 sono indipendenti, quindi danno una base di $B + C$.
• Se scriviamo $aB_1 + bC_1 + cC_2 = D$ otteniamo $a + c = 0$, $-3c = h-2$, $b = 0$ e $a - c = h-2$. Quindi D è contenuto in $B + C$ soltanto se $h = 2$, i.e. $D = 0$.

3. Dire quali tra i seguenti insiemi di vettori è una base di $\mathbb{R}^4$, completare ad una base quegli insiemi che non risultano essere una base di $\mathbb{R}^4$

• { (1, 0, 8 , 9), (2 , 3 ,4 , 0) , (2, 0 , 1 , 2) , (1, 7, 5 ,9)}
• { (1, 0, 0, 1), (2,3,3,2),(0,-1,-1,0)}
• { (h,0,1,0),(1,3,2,0),(1,0,h,0),(1,3h,2h,0)} $\quad$ h $\in \mathbb{R}$

Soluzione:
• Sono indipendenti, quindi una base.
• Sono dipendenti. Una base è data per esempio da: $\{(1,0,0,1),(0,-1,-1,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$
• Sono dipendenti. Per $h \neq 1$ si può completare così: $\{(h,0,1,0),(1,3,2,0),(1,0,h,0),(0,0,0,1)\}$.
Per $h = 1$ possiamo scegliere per esempio $\{(1,0,1,0),(1,3,2,0),(1,0,2,0),(0,0,0,1)\}$.

4. Siano $V_1 =< (1,0,1,0),(2,0,1,0) >$, $V_2 =< (3,0,2,0),(1,3,3,2) >$. Trovare una base di $V_1 \cap V_2$. Calcolare quindi $\dim(V_1 + V_2)$
Soluzione: Si vede direttamente che $(1,0,1,0)+(2,0,1,0) = (3,0,2,0)$. Poi $(1,0,1,0)$, $(2,0,1,0)$ e $(1,3,3,2)$ sono indipendenti. Quindi $V_1 \cap V_2 =< (3,0,2,0) >$.

5. Si consideri $M_2(\mathbb{R})$ e $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : (1,2)A = (0,0)\}$,
• verificare che V è sottospazio
• determinare una base di V
Soluzione:
• Se scriviamo $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, vediamo che V è definito da $a_1 + 2a_2 = 0$ e $a_2 + 2a_4 = 0$.
Le soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogeneo è un sottospazio.
• Le due equazioni del sistema hanno rango due, quindi V ha dimensione due. Per esempio $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ sono independenti e quindi una base.

6. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e sia $B = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ una sua base. Determinare la dimensione e una base del sottospazio W di V generato dai vettori $v_1 = u_4 - u_3 + u_1$, $v_2 = 2u_2 + u_3 - u_4$, $v_3 = 2u_2 + 2u_1 + u_4 - u_3$; completare poi ad una base di V.
Soluzione: Si osserva che $v_3 - 2v_1 = v_2$ e che per esempio v_1 e v_2 sono indipendenti. Quindi W ha dimensione due e $\{v_1, v_2\}$ ci da una base di W. Per completare ad una base di V si osserva che v_1, v_2, u_3, u_4 sono indipendenti.