Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE110 - Geometria 1 - Tutorato V

DOCENTE: ANGELO FELICE LOPEZ

TUTORE: A.MAZZOCCOLI, K.CHRIST

1. Calcolare il rango delle seguenti matrici (al variare del parametro dove presente):

• $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ \frac{-1}{2} & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ • $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ • $C = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$

• $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ • $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ • $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

Soluzione:

• Si calcola $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ \frac{-1}{2} & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi ha rango due.

• $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi ha rango tre.

• $\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 4-k^2 & 0 \\ 0 & 1-k & k-1 \end{pmatrix}$. Per $k = 2, -2$ otteniamo rango due. Altrimenti continuiamo:

$\sim \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$. Quindi il rango é tre per $k \neq -2, 1, 2$ e altrimenti é due.

• $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 22 & 10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi il rango è due.

• $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quindi il rango è due.

• $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & k & -1 \\ 0 & 0 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & k+1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & -k^2 \end{pmatrix}$. Quindi per $k = 0$ il rango è tre, altrimenti è quattro.

2. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali.
Si stabilisca quali delle seguenti affermazioni sono vere , quindi dimostrarle, e in caso contrario trovare un controesempio
• $r(A+B) \leq min(r(A), r(B))$
• $r(A) = r = r(B) \Rightarrow r(AB) = r \quad (r < n)$
• $r(A) < n, r(B) < n \Rightarrow r(AB) < n$
• $r(A) = n = r(B) \Rightarrow r(AB) = n$
Soluzione:
• Falso, per esempio prendiamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, in questo caso $r(A+B) = 2 > 1 = min(r(A), r(B))$.
• Falso, se per esempio $A = B \neq 0$ nilpotente, $r(A) = r(B) > 0$ ma $r(AB) = r(A^2) = r(0) = 0$.
• Vero perché $r(AB) \leq min\{r(A), r(B)\} < n$.
• Vero, una matrice ha rango n se e solo se è invertibile. Ma se A e B sono invertibili allora anche AB e invertibile (l'inversa è dato da $B^{-1}A^{-1}$).

3. Dire, attraverso il calcolo del rango, se i seguenti sistemi sono risolubili oppure no
• $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 6x - 2y + 6z = 2 \\ 7x + 7z = 3 \end{cases}$ • $\begin{cases} 2x + ky + 2z = 0 \\ kx + ky + 2kz = 0 \\ kx = 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$
Soluzione:
• Usiamo il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli e calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti e del sistema completo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango due. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 6 & 2 \\ 7 & 0 & 7 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & 0 & -4 \\ 0 & -14 & 0 & -4 \end{array}\right)$ anche ha rango due, quindi il sistema è risolubile.
• Il sistema è omogeneo, quindi le matrice di coefficenti e del sistema completo sono uguali quindi Kronecker-Rouché-Capelli è ovviamente soddisfatto (infatti un sistema omogeneo ha sempre la soluzione $(0, ..., 0)$).

4. Dire se la seguente matrice è invertibile al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ ed in caso trovare l'inversa
$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
Soluzione: $\begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 3 \\ k & k & k^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 3-k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi A ha rango due indipendentemente da k e quindi non è invertibile.

5. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri $A = \begin{pmatrix} 8 & k & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$
• Si determinino i valori di k per i quali è,o non, invertibile e in tal caso si calcoli l'inversa

con operazioni elementari.

• Sia $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si determinino per quali valori di k esiste $B \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $BA = C$ senza ridurre il problema alla soluzione di un sistema lineare negli elementi di B

Soluzione:

• $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & k & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & k & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-k^2/8 & -1/4k & -k/8 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & k & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (k^2-2k-8)/8 & -k/8 & (8-k^2)/8 & 1 \end{array}\right)$. Quindi A è invertibile se e solo se $k \neq -2, 4$. In questo caso otteniamo per l'inversa:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & k & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -k/(k^2-2k-8) & (-k^2+8)/(k^2-2k-8) & 8/(k^2-2k-8) \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & k & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k/(k^2-2k-8) & 2k/(k^2-2k-8) & -8/(k^2-2k-8) \\ 0 & 0 & 1 & -k/(k^2-2k-8) & (-k^2+8)/(k^2-2k-8) & 8/(k^2-2k-8) \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/(k^2-2k-8) & -2/(k^2-2k-8) & (k-2)/(k^2-2k-8) \\ 0 & 1 & 0 & k/(k^2-2k-8) & 2k/(k^2-2k-8) & -8/(k^2-2k-8) \\ 0 & 0 & 1 & -k/(k^2-2k-8) & (-k^2+8)/(k^2-2k-8) & 8/(k^2-2k-8) \end{array}\right)$$

• Se A è invertibile possiamo prendere $B = CA^{-1}$. Altrimenti A ha rango due e lo spazio generato dalle righe di BA è contenuto nello spazio generato dalle righe di A, i.e. è contenuto in $<(8,k,2),(0,1,1)>$. Per avere $BA = C$ dobbiamo quindi avere che anche le righe di C sono contenute in quello spazio. Ma si vede direttamente che per esempio $(1,0,0) \notin <(8,k,2),(0,1,1)>$. Quindi in questo caso non esiste una matrice B (da notare che non è sufficiente dire che A non è invertibile per affermare la non-esistenza di B).