Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE110 - Geometria 1 - Tutorato VI

DOCENTE: ANGELO FELICE LOPEZ

TUTORE: A.MAZZOCCOLI, K.CHRIST

1. Per $h, k \in \mathbb{R}$ si determinino per quali h e k il sistema è,o no, compatibile e in tale caso si calcolino le soluzioni $\begin{cases} kX + hY + T = -1, \\ X + kZ + T = 2, \\ -X + 2Z - T = -2 \\ X + kY + hZ = 1 \end{cases}$

   Soluzione: Primo esonero A.A. 2011-2012.

2. In $M_3(\mathbb{R})$ si considerino le seguenti matrici con $k, h \in \mathbb{R}$

   $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} k & h & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   • Si determini per quali k attraverso operazioni elementari è possibile trasformare A in B e, per tali valori, si espliciti la sequenza di tali valori.

   •Per quali k C si può esprimere come prodotto di matrici elementari? Si espliciti tale prodotto.

   • Per quali h e k D è invertibile? Per tali valori si calcoli l'inversa

   Soluzione:

   • Si not che cambiando le righe due e tre otteniamo l'identità da B. Quindi dobbiamo determinare quando A è invertibile. La sequenza di valori allora è data dalle stesse operazioni: $\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix}$. Quindi possiamo trasformare A in B se e solo se $k \neq -1$.

   • Si puo esprimere una matrice come prodotto di matrici elementari se e solo se la matrice è invertibile. Quindi calcoliamo come sempre:

   $\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & -2k & 1 \end{pmatrix}$ Vediamo che per k = 1 non è invertibile. Altrimenti continuiamo:

   $\sim \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2k & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il prodotto di matrici elementari è come sempre dato da quelle che corrispondono alle operazioni elementari che abbiamo usato per trasformare la matrice.

   • $\left(\begin{array}{ccc|ccc} k & h & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ k & h & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & h-k & 2 & 1 & -k & 0 \end{array}\right) \sim$

   $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2+k-h & 1 & -k & k-h \end{array}\right)$. Quindi D è invertibile se e solo se $h - k \neq 2$, in questo caso possiamo continuare:

   $\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(2+k-h) & -k/(2+k-h) & (k-h)/(2+k-h) \end{array}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/(2+k-h) & k/(2+k-h) & 1-(k-h)/(2+k-h) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(2+k-h) & -k/(2+k-h) & (k-h)/(2+k-h) \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/(2+k-h) & 1-k/(2+k-h) & (k-h)/(2+k-h)-1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/(2+k-h) & k/(2+k-h) & 1-(k-h)/(2+k-h) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(2+k-h) & -k/(2+k-h) & (k-h)/(2+k-h) \end{array}\right)$$

3. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   • Si determini per quali a, A è ,o no, prodotto di matrici elementari e in tale caso esprimere A come tale prodotto
   • Determinare per quali a è possibile trasformare A^t in I_4 con sole operazioni elementari.
   Soluzione: Primo esonero A.A. 2012-2013.

4. Sia $h \in \mathbb{R}$ $V = \mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Siano $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, h, 0)$, $v_3 = (h, 0, 1)$, $v_4 = (1, h, h)$; $U =< v_1, v_2 >$ e $W = U \cap < v_3, v_4 >$
   • Calcolare la dimensione di U e di W usando esclusivamente operazioni elementari sui vettori.
   • Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$, usando esclusivamente operazioni elementari sui vettori
   • Determinare se esiste $h \in \mathbb{R} : U \oplus W = V$
   Soluzione: Primo esonero A.A. 2012-2013.

5. Verificare attraverso un esempio che:
   $\text{Det}(A + B) \neq \text{Det}(\ A)+ \text{Det}(B)$
   Soluzione: Per esempio $A = B = I$: $\text{Det}(2I) = 4 \neq 2 = \text{Det}(I) + \text{Det}(I)$.