Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE110 - Geometria 1 - Tutorato VII

DOCENTE: ANGELO FELICE LOPEZ
TUTORE: A.MAZZOCCOLI, K.CHRIST

1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici (al variare del parametro dove presente):

• $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ • $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ • $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

• $D = \begin{pmatrix} 6 & k & 1 \\ 1 & 2 & k-1 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ • A^t • $A \cdot B$

Soluzione: • $\det(A) = 2 - (-3) = 4$. • $\det(B) = 6 - 40 = -34$
• $\det(C) = 1(-18+24) - 2(-9+21) + 3(-8+14) = 6 - 24 + 18 = 0$ (questo risultato lo si osserva direttamente osservando che la prima riga è uguale alla seconda se moltiplicata per -1).
• $\det(D) = 24 - k(2 - k^2 + k) - 2k = k^3 - k^2 - 4k + 24$.
• $\det(A) = \det(A^t) = 4$ • $\det(A \cdot B)$ =$\det(A)$ $\det(B) = -136$.

2. Calcolare la matrice dei cofattori delle seguenti matrici:

• $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ • $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ • $C = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 \\ -1 & 0 & k-1 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

e calcolarne l'inversa ricordando che $M^{-1} = \frac{1}{detM}[cof(M)]^t$

Soluzione:
• $\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ e $\det(A) = 6 - 16 = -10$. Quindi $A^{-1} = -1/10 \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.
• $\text{cof}(B) = \begin{pmatrix} -13/2 & -28 & 25/2 \\ 11 & 7 & -6 \\ -1/2 & 14 & 5 \end{pmatrix}$ e $\det(B) = 2(-13/2)+(28)+3(25/2) = 105/2$. Quindi $B^{-1} = 2/105 \begin{pmatrix} -13/2 & 11 & -1/2 \\ -28 & 7 & 14 \\ 25/2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.
• $\text{cof}(C) = \begin{pmatrix} 0 & k^2-k+2 & 0 \\ 2-2k & 0 & k^2-k \\ k^2-2k+1 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$ e $\det(C) = (k-1)(2+k^2-k)$. Quindi per $k \neq 1$, otteniamo $C^{-1} = 1/((k-1)(k^2-k+2)) \begin{pmatrix} 0 & 2-2k & k^2-2k+1 \\ k^2-k+2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2-k & k-1 \end{pmatrix}$.

3. Calcolare la soluzione dei seguenti sistemi attraverso la regola di Cramer

• $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x+4y+2z=2 \\ 3x-y-z=3 \end{cases}$ • $\begin{cases} 2x+ky+2z=0 \\ kx+ky+2kz=0 \\ kx=0 \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$ • $\begin{cases} x+3y+2z-t=1 \\ 6x+2y+2t=2 \\ 6z+t=0 \\ 2x+2z+t=3 \end{cases}$

Soluzione:

• Se scriviamo il sistema come $Ax = b$ e A_j per la matrice in cui abbiamo sosituito la colonna j con b otteniamo $\det(A) = 2(-2)-3(-7)-(-13) = 30$, $\det(A_1) = 1(-2)-3(-8)-(-14) = 36$, $\det(A_2) = 2(-8)-(-7)-(-3) = -6$ e $\det(A_3) = 2(14)-3(-3)+(-13) = 24$. Quindi usando la regola di Cramer otteniamo la soluzione $x = (6/5, -1/5, 4/5)$.
• La soluzione e data da $x = (0, 0, 0)$.
• Si calcola che $\det(A) = 40$, $\det(A_1) = 140$, $\det(A_2) = -140$, $\det(A_3) = 40$ e $\det(A_4) = -240$. Quindi otteniamo la soluzione $x = (7/2, -7/2, 1, -6)$.

4. Siano $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, siano $M, N \in M_2n(\mathbb{R})$ le seguenti matrici:
$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$
dimostrare che $det(M) = det(A)det(C) = det(N)$.
Soluzione: (Si nota che le entrate della matrice sono anch'esse matrici, quindi non possiamo usare la formula per calcolare il determinante di una matrice due per due.) Se A non è invertibile, sappiamo che c'è un sottoinsieme di righe di A che è dipendente. Quindi anche N non è invertibile. Lo stesso ragionamento lo si fa con le colonne e otteniamo anche che ,se A non invertibile, M non è invertibile. In questo caso quindi otteniamo $det(M) = 0 = det(A)det(C) = det(N)$. Altrimenti abbiamo

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -BA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Usando l' estensione di Laplace per calcolare il determinante, si vede direttamente, che $\det(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -BA^{-1} & I_n \end{pmatrix}) = 1$, $\det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix})$ $=\det(A)$ e $\det(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}) = \det(C)$. Poichè $\det(XY) = \det(X)\det(Y)$ allora questo prova l'identità per N. Si continua analogamente con M.