Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE110 - Geometria 1 - Tutorato VIII

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutore: A.Mazzoccoli, K.Christ

1. Discutere la risolubilità dei sistemi lineari $AX = B$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, specificando il numero di soluzioni nei vari casi.
   Nei caso in cui è risolubile il sistema, calcolarne la soluzione (se la soluzione risulta unica calcolarla col metodo di Cramer):
   - $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 3 & 2k & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} k^2-1 \\ 2k-2 \\ 0 \end{pmatrix}$
   - $A = \begin{pmatrix} k & -k & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   - $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2k-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Soluzione:
   • $\det(A) = k(2k+4) + 6 = 2k^2 + 4k + 6$. Quindi il determinante non è nullo indipendentemente da k e il sistema ha una soluzione unica. Si calcola poi $\det(A_1) = (k^2-1)(2k+4)+4k-4 = 2k^3+4k^2+2k-8$, $\det(A_2) = k(2k-2)-3(k^2-1) = -k^2-2k+3$ e $\det(A_3) = 4k+6k^2-6$, dove A_i è ottenuto da A sostituendo la colonna i con B. Quindi la soluzione è $X = ((2k^3+4k^2+2k-8)/(2k^2+4k+6), (-k^2-2k+3)/(2k^2+4k+6), (6k^2+4k-6)/(2k^2+4k+6))$.
   • $\begin{pmatrix} k & -k & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ k & -k & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & k & k & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & k-k^2 & 1-k \end{pmatrix}$
   Se $k = 1$ quindi otteniamo un spazio due dimensionale delle soluzioni, presi come parametri u e v otteniamo $t = u$, $z = v$, $y = -u - v$ e $x = 2u + 2v + v = 2u + 3v$.
   Altrimenti lo spazio delle soluzioni è uno dimensionale, preso come parametro u si ha $z = u$, $t = -ku$, $y = 0$ e $x = u$.
   • Si vede direttamente che le prime due righe possono essere soddisfatte soltanto quando $k = 1/2$. In questo caso otteniamo $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$
   $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Quindi le soluzioni(in una dimensione) sono date dal parametro u ottenendo $x = -2$, $y = 4 - 2u$ e $z = u$.

2. Sia V un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale, $\delta : V\text{x}V \to V$ che associa $(P, Q) \to Q - P$. Dimostrare che V è uno spazio affine su se stesso.

   Soluzione: Verifichiamo i due assiomi di un spazio affine (in questo caso, "‘su se stesso"’ vuole dire che $A = V$):

   (a) Per $P, v \in V$ dobbiamo avere un unico Q con $(P, Q) = v$. Ma $(P, Q) = Q - P$ e l'unica soluzione di $Q - P = v$ è $Q = v + P$.
   (b) Per $P, Q, R \in V$ abbiamo $(P, Q) + (Q, R) = Q - P + R - Q = R - P = (P, R)$.

3. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ Si trovi un'applicazione $\delta : A\text{x}A \to \mathbb{R}$ che renda A uno spazio affine su $\mathbb{R}$.
   Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Come nel punto precedente mostrare che essite un'applicazione che rende l'insieme $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ uno spazio affine su $\mathbb{R}$.

   Soluzione: Si consideri $\delta((x, f(x)), (y, f(y))) = y - x$. Come sopra si dimostra che quella funzione soddisfa gli assiomi di un spazio affine.

4. Sia $V = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$ e $\delta : \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che associa $(P, Q) \to P \cdot Q$.
   A risulta essere uno spazio affine?
   Soluzione: Non è uno spazio affine, nessun assioma è soddisfato; per esempio, $(P, Q) +$

   $(Q, R) = PQ + QR \neq PR = (P, R)$ in generale.

5. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ e $A = V$ affine su se stesso.
   Sia $O = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ come origine e siano $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ una base.
   Calcolare le coordinate della matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nel riferimento affine $\{0, B_1, B_2, B_3, B_4\}$.

   Soluzione: Si deve solvere il sistema di equazioni: $C = O + x_1B_1 + x_2B_2 + x_3B_3 + x_4B_4$. Si possono usare tutti i metodi che conosciamo per risolvere i sistemi lineari (per es. Gauss-Jordan), qua è abbastanza facile vedere che: $x_4 = 2$, $x_3 = 0$, $x_2 = 3$ e $x_1 = -10$.

6. Sia $V = A = \{P(X) : deg(P(X)) < 4\}$ spazio dei polinomi di grado minore di 4 in X. Si consideri come origine $O = X - X^2$ e una base dello spazio affine $\{1, 2X, 3X^2, 4X^3\}$.
   Calcolare le coordinate affini del polinomio $1-X$ nel riferimento affine $\{O, 1, 2X, 3X^2, 4X^3\}$.
   Soluzione: Come sopra si vede che $1 - X = (X - X^2) + 1 - (2X) + 1/3(3X^2)$.