Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE110 - Geometria 1 - Tutorato IX

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutore: A.Mazzoccoli, K.Christ

1. Determinare quali delle seguenti terne sono punti allineati di $\mathcal{A}^2(\mathbb{R})$:
   • $\{(\frac{1}{2},2),(\frac{1}{2},100),(\frac{1}{2},\frac{\pi}{4})\}$
   • $\{(1,1),(1,-1),(-1,1)\}$
   • $\{(\frac{5}{4},\frac{9}{4}),(\frac{-3}{2},\frac{-1}{2}),(\frac{1}{5},\frac{6}{5})\}$
   Soluzione:
   • Si vede direttamente che tutti e tre sono contenuti nelle rette $x = 1/2$.
   • I primi due sono contenuti in $x = 1$, il terzo invece no.
   • La retta passante tra i primi due punti è data in coordinate parametriche da $(5/4, 9/4)+t(-3/2,-1/2)$. Quindi i punti sono allineati se esiste un t t.c. $(5/4, 9/4)+t(-3/2,-1/2) = (1/5, 6/5)$. Si vede poi che il sistema $\left(\begin{array}{c|c} -3/2 & -21/20 \\ -1/2 & -21/20 \end{array}\right)$ non è compatibile, e quindi i punti non sono allineati.

2. Determinare un'equazione cartesiana della retta r di $\mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ contenente i punti P e Q:
   • $P = (1, \frac{4}{3})$ e $Q = (\frac{3}{2}, 1)$
   • $P = s \cap s'$ e $Q = t \cap t'$ dove s , s',t e t' sono le rette
   $s : x + 5y - 8 = 0$; $s' : 3x + 6 = 0$; $t : 5x - \frac{y}{2} = 1$; $t' : x - y = 5$
   Soluzione:
   • Un'equazione parametrica è data da $(1, 3/4) + t(3/2, 1)$, i.e. $x = 1 + 3/2t$ e $y = 3/4 + t$. Otteniamo $t = 2/3x - 2/3$ e poi $y = 1/12 + 2/3x$ ci danno le equazioni cartesiane (in alternativa si puo ottenere l'equazione come $\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 4/3 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$.)
   • Dobbiamo calcolare le intersezioni: $3x + 6 = 0 \to x = -2$ e $x + 5y - 8 = 0 \to y = 2$, quindi $P = (-2, 2)$. Analogamente $Q = (-1/3, -16/3)$. Così otteniamo l'equazione parametrica $(-2, 2) + t(5/3, 22/3)$ e si calcola come prima che l'equazione cartesiana è data da $22x + 5y + 34 = 0$.

3. Determinare l'equazione parametrica delle rette di $\mathcal{A}^2(\mathbb{C})$ parallele al vettore v e passante per il punto $r \cap s$ in ciascuno dei seguenti casi:
   • $v = (2, 4)$, $\quad r : 3x - 2y - 7 = 0$, $\quad s = 2x + 3y = 0$
   • $v = (-5\sqrt{2}, 7)$, $\quad r : x - y = 0$, $\quad s : x + y = 1$
   Soluzione:
   • Come prima si calcola l'intersezione ottenendo $r \cap s = (21/13, -14/13)$ e quindi l'equazione parametrica è data da $(21/13, -14/13) + t(2, 4)$.
   • Analogamente, si ottiene $(1/2, 1/2) + t(-5\sqrt{(}2), 7)$.

4. Si stabilisca se le seguenti rette di $\mathcal{A}^2(\mathbb{R})$ sono parallele e coincidenti, parallele e distinte, oppure incidenti; se sono incidenti calcolare il punto di intersezione:
   • $r : x + 2y - 1 = 0 \qquad s : -x + y - 2 = 0$
   • $r : 3x - 2y + 1 = 0 \qquad s = \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 4 + 6t \end{cases}$
   • $r = \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \end{cases} \qquad s = \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = \frac{8}{3} + 2t \end{cases}$
   Soluzione:

• Calcoliamo il determinante dei coefficienti per vedere se sono parallele: $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$ quindi non sono parallele. L'intersezione è $(-1,1)$.
• Scriviamo l'equazione di r in forma parametrica: Per $y = t$ otteniamo $x = 2/3t - 1/3$. Quindi la giacitura è genarata da $(2/3, 1) = 1/6(4,6)$ dove $(4,6)$ genera la giacitura di s e quindi sono parallele. Poiché s contiene per esempio $(2,4)$ ma r non lo contiene esse non sono coincidenti.
• Usando come prima la giacitura, si vede direttamente che sono parallele. Poiché entrambe contengono per esempio $(0,2)$allora risultano sono coincidenti.

5. Sia A uno spazio affine di dimensione 3 in cui sia fissato un riferimento affine, e siano R_h, $S \subset \mathcal{A}$ le rette di equazioni (parametriche e cartesiane rispettivamente)
$$R_h : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - ht \\ z = 3 - t \end{cases} \quad h \in \mathbb{R} \qquad S : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$$
•Si determini la posizione reciproca di R_h e S al variare di $h \in \mathbb{R}$ e si stabilisca se $R_h \neq S$ $\forall h \in \mathbb{R}$
• Per l'unico valore di h per cui R_h e S sono parallele,si determini il piano che le contiene entrambe.
Soluzione:
• Si trova come prima un'equazione parametrica di S (in alternativa: un'equazione cartesiana di R_h) e si ottiene $(1,1,0) + t(1,3,1)$. Quindi sono parallele se e solo se $h = 3$. L'equazione di R_h per x è $x = 1 - t$ e quella di S è $x = 1 + t$, quindi se hanno un'intersezione sarà per $t = 0$. Ma $(1,1,0) \neq (1,2,3)$ e quindi non si intersecano indipendentemente da h.
• Nella forma parametrica si puo direttamente scrivere l'equazione del piano: $(1,2,3) + t_1((1,2,3) - (1,1,0)) + t_2((1,2,3) - (0,-2,-1) = (1,2,3) + t_1(0,1,3) + t_2(1,4,4)$ (abbiamo preso un punto su R_3, $(1,2,3)$, e due punti su S e scritto l'equazione di un piano per tre punti).

6. Determinare un'equazione cartesiana del piano di $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ passante per il punto $Q = (1,-1,-2)$ e parallelo alle rette :
$$r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 5 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$
Soluzione: Iniziamo scrivendo le rette r e s in forma parametrica ,come prima otteniamo per $s : (1,0,2) + t(0,1,0)$ e per $r : (1,0,4) + t(1,1,-1)$. Quindi il piano in forma parametrica sarà dato da $(x,y,z) = (1,-1,-2) + t_1(1,1,-1) + t_2(0,1,0)$. Dopo aver trasformato questo nella forma cartesiana, otteniamo l'equazione $x + z + 1 = 0$.

7. Sia $\mathcal{A}$ uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine.
• Calcolare le equazioni cartesiane del sottospazio affine S passante per $Q = (0,1,0,-1)$ e avente per giacitura il sottospazio generato dai vettori $v = 6e_1 + 2e_2 + 2e_3 + e_4$ e $w = e_2$
• Sia T il sottospazio affine di equazioni $\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$, S è parallelo a T?
Soluzione:
• Si nota che stiamo considerando un sottospazio duo dimensionale di uno spazio quattro dimensionale, quindi la forma cartesiana consisterà in due equazioni. Iniziamo scrivendo l'equazione parametrica: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,1,0,-1) + t_1(6,2,2,1) + t_2(0,1,0,0)$. Scegliamo tre punti non allineati e contenuti in S, per esempio $(0,1,0,-1)$, $(0,2,0,-1)$ e $(6,3,2,0)$ (perché un piano è determinato unicamente se abbiamo tre punti). Le due equazioni della forma cartesiana saranno del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5 = 0$, dove possiamo suppore $a_5 = 1$ poichè S non contiene $(0,0,0,0)$. Se inseriamo i tre punti nell'e-

quazione otteniamo un sistema di tre equazioni lineari con quattro variabili, per esempio per il primo punto $a_2 - a_4 + 1 = 0$. Risolvendo quel sistema otteniamo uno spazio uno dimensionale di soluzioni $(t, 0, -3t - 1/2, 1)$. Scegliendo per esempio $t = 0$ e $t = -1/6$ otteniamo $-12x_3 + x_4 + 1 = 0$ e $-1/6x_1 + x_4 + 1 = 0$, un'equazione cartesiana del piano.
• Otteniamo per l'equazione parametrica di T: $(0, 2, 0, 0) + t_1(0, 2, 2, 0) + t_2(2, 2, 0, 2)$. Si vede che la giacitura di T,che è lo span di $(0, 2, 2, 0)$ e $(2, 2, 0, 2)$, non è la stessa di S, che è lo span di $(6, 2, 2, 1)$ e $(0, 1, 0, 0)$; per esempio, $(0, 1, 0, 0) = t_1(0, 2, 2, 0) + t_2(2, 2, 0, 2)$ non ha una soluzione.