Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2015/2016

GE110 - Geometria 1 - Tutorato I

DOCENTE: ANGELO FELICE LOPEZ

TUTORE: A.MAZZOCCOLI, K.CHRIST

1. Dare un esempio di due matrici quadrate non nulle di ordine 2 e 3 il cui prodotto sia una matrice nulla.

2. Sia $A \in M_2(\mathbb{R})$ con $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix}$, calcolare:

   $(a)\, A^2 \qquad (b)\, 3A^3 - \frac{1}{2}A + A^0 \qquad (c)\, (A^t)^2 + AA^t + A^tA - 3I_2$

3. Svolgere il prodotto tra le seguenti matrici (AB e BA)

   $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$

4. Una matrice quadrata A si chiama nilpotente se esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $A^k = 0$ (matrice nulla). Mostrare che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ è nilpotente di ordine 3 (i.e. $A^3 = 0$).
   Dimostrare che $A \in M_n(K)$ nilpotente non è invertibile.

5. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $ad - bc \neq 0$. Dimostrare che allora A è invertibile con $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
   Una matrice A si chiama involutoria se A è invertibile e $A = A^{-1}$. Quand'è $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ involutoria?

6. Dare un esempio di una matrice quadrata A tale che A considerato come un elemento di $M_n(\mathbb{R})$ è invertibile ma considerato come un elemento di $M_n(\mathbb{Z})$ non è invertibile. È possibile che una matrice invertibile in $M_n(\mathbb{Z})$ non è invertibile in $M_n(\mathbb{R})$?

7. Dimostrare che se $A \in M_n(K)$ allora $A + A^t$ è simmetrica e $A - A^t$ è antisimmetrica.

8. Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali:

   $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_2(\mathbb{R})$)

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici.