UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2016-2017

Prova scritta del 13-9-2017

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 - 2X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0 \\ X_2 + X_4 = -k \\ X_1 + kX_2 - kX_3 = 0 \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Siano k un numero reale. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano

$$v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (k,1,0,0), v_3 = (1,1,1,0), v_4 = (1,k,k,-1),$$

$$U_k =< v_1, v_2 > \text{ e } W_k = U_k+ < v_2, v_3 > .$$

(a) Determinare una base di U_k ed una di W_k e calcolarne le dimensioni.

(b) Calcolare la dimensione di $U_k \cap W_k$ e di $(U_k + W_k)+ < v_4 >$.

(c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che W_k e v (insieme) generano $\mathbb{R}^4$.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Sia S il sottospazio con le seguenti equazioni

$$S : \begin{cases} X - Y - Z = 0 \\ X + Y + W = 0 \end{cases}$$

e sia T_k il sottospazio passante per il punto $Q = Q(-1,1,0,1)$ e di giacitura $W_k =< e_1 + e_2 - ke_3, ke_1 + e_4 >$.

(a) Determinare i valori di k per i quali S e T_k sono sottospazi affini di A e, in tal caso, calcolare la loro dimensione.

(b) Determinare per quali k si ha che S e T_k sono paralleli, incidenti o sghembi.

(c) Determinare per quali k esiste un iperpiano H tale che $S \subseteq H$ e $T_k \subseteq H$.

4. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e siano $v = e_2 - e_3, w = ke_1 + e_2 + e_4$. Sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare tale che

$$v \in N(F), F(e_1 - v + e_3) = w,\ F(e_1) = 6e_1 + 2e_3, F(e_2 + e_3 + e_4) = 3e_1 + e_2.$$

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.