

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2016-2017

Prova scritta del 16-6-2017

TESTO E SOLUZIONI

Avvertenze:

- A. Per il recupero del primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;
- B. Per il recupero del secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;
- C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 = 1 \\ kX_1 + X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 - kX_3 + X_4 = -1 \\ X_2 + kX_3 + X_4 = 1 \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE COME RECUPERO DEL I ESONERO:

(ovviamente valida anche come scritto)

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_3 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 & -1 \\ k & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -k & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui le operazioni $R_2 \rightarrow R_2 - kR_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ danno

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1+k^2 & -1-k & k \\ 0 & -k & 1+k & -1 & 2 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_2 con R_4 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & -k & 1+k & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1+k^2 & -1-k & k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \rightarrow R_3 + kR_2$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+k+k^2 & -1+k & 2+k \\ 0 & 0 & 1+k^2 & -1-k & k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \rightarrow R_3 - R_4$, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 2k & 2 \\ 0 & 0 & 1+k^2 & -1-k & k \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_3 con R_4 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+k^2 & -1-k & k \\ 0 & 0 & k & 2k & 2 \end{pmatrix}$$

e infine l'operazione $R_4 \rightarrow R_4 - \frac{k}{1+k^2}R_3$, si da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+k^2 & -1-k & k \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2k^3+k^2+3k}{1+k^2} & \frac{2+k^2}{1+k^2} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $2k^3 + k^2 + 3k = 0$ se e solo se $k = 0$. Se $k \neq 0$ il sistema è a gradini e quindi compatibile, mentre se $k = 0$ si ha che $2 + k^2 \neq 0$ ed il sistema è incompatibile.

Dunque si vede subito che il sistema è compatibile se e solo se $k \neq 0$.

In tal caso le soluzioni sono

$$X_4 = \frac{2+k^2}{2k^3+k^2+3k}, X_3 = \frac{2k^2+2k+2}{2k^3+k^2+3k}, X_2 = \frac{-2k^2+k-2}{2k^3+k^2+3k}, X_1 = \frac{-k-2}{2k^3+k^2+3k}. \quad \blacksquare$$

SOLUZIONE COME SCRITTO:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det(A) = -2k^3 - k^2 - 3k = 0$ se e solo se $k = 0$, pertanto, se $k \neq 0$, abbiamo $r(A) = r(A \ b) = 4$ e il sistema è compatibile. Invece se $k = 0$ abbiamo

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

quindi $r(A \ b) = 4 > r(A)$ ed il sistema è incompatibile.

Pertanto il sistema è compatibile se e solo se $k \neq 0$. In tal caso le soluzioni sono date dalla regola di Cramer

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{-2k^3 - k^2 - 3k} = \frac{-k-2}{2k^3+k^2+3k}, X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -k & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{-2k^3 - k^2 - 3k} = \frac{-2k^2+k-2}{2k^3+k^2+3k},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -k & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2k^3 - k^2 - 3k} = \frac{2k^2+2k+2}{2k^3+k^2+3k}, X_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -k & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -k & -1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{-2k^3 - k^2 - 3k} = \frac{2+k^2}{2k^3+k^2+3k}. \quad \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano

$$U_k = \langle (k, -k, 0, 0), (k, 1, 0, -1), (0, k+1, 0, k) \rangle.$$

e W il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 - X_2 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_4 = 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare le dimensioni di U_k , W e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.
- (b) Determinare le dimensioni di $U_k + W$ e di $U_k \cap W$;
- (c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$\{(k, -k, 0, 0), (k, 1, 0, -1), (1, 1, 1, -2), v\}$$

non sono generatori di $U_k + W$.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

SOLUZIONE COME RECUPERO DEL I ESONERO:

- (a) Per calcolare la dimensione di U_k facciamo operazioni elementari sulla matrice dei generatori

$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1+k & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_2 \rightarrow R_2 - R_1$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1+k & 0 & -1 \\ 0 & 1+k & 0 & k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$, abbiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1+k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\dim U_k = r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq -1, 0 \\ 2 & \text{se } k = -1, 0 \end{cases}$ ed una sua base è

$$\{(k, -k, 0, 0), (0, 1+k, 0, -1), (0, 0, 0, 1+k)\} \text{ se } k \neq -1, 0$$

e

$$\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, -1)\} \text{ se } k = -1, \{(0, 1, 0, -1), (0, 0, 0, 1)\} \text{ se } k = 0.$$

Per calcolare la dimensione ed una base di W risolviamo il sistema. Posto $X_2 = s$, $X_3 = t$ si trova $X_1 = s$, $X_4 = -2s$ e quindi un vettore di W è del tipo

$$(s, s, t, -2s) = s(1, 1, 0, -2) + t(0, 0, 1, 0).$$

Se ne deduce che $\dim W = 2$ ed una sua base è $\{(1, 1, 0, -2), (0, 0, 1, 0)\}$.

(b) Consideriamo la matrice che ha per righe i generatori di U_k (ottenuti dalla matrice A) e W ,

$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1+k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+k \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e facciamo operazioni elementari. Scambiando R_1 con R_4 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1+k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+k \\ k & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \rightarrow R_4 - kR_1$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1+k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+k \\ 0 & -2k & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_5 con R_3 si ha la matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1+k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2k & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix}.$$

Se $k = -1$ si trova

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 4.

Se $k = 0$ si trova

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 4. Se $k \neq -1, 0$ con l'operazione $R_4 \rightarrow -\frac{1}{2k}$, si ottiene da B_k

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1+k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix}.$$

che ha rango 4.

Quindi $\dim(U_k + W) = 4$ per ogni k e

$$\dim(U_k \cap W) = \dim U_k + \dim W - \dim(U_k + W) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq -1, 0 \\ 2 & \text{se } k = -1, 0 \end{cases} + 2 - 4 = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq -1, 0 \\ 0 & \text{se } k = -1, 0 \end{cases}.$$

(c) Essendo $U_k + W = \mathbb{R}^4$ si ha che $\{(k, -k, 0, 0), (k, 1, 0, -1), (1, 1, 1, -2), v\}$ non sono generatori di $U_k + W$ se e solo se sono linearmente dipendenti. Consideriamo i primi tre vettori e facciamo operazioni elementari su

$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_3 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ k & 1 & 0 & -1 \\ k & -k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui scambiando R_2 con R_3 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ k & -k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_2 \rightarrow R_2 - kR_1, R_3 \rightarrow R_3 - kR_1$, abbiamo la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2k & -k & 2k \\ 0 & 1-k & -k & -1+2k \end{pmatrix}.$$

Se $k = 0$ si vede subito che $r(C) = 2$, quindi qualsiasi $v \in \mathbb{R}^4$ va bene.

Se $k \neq 0$, dividendo la seconda riga per k si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1-k & -k & -1+2k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \rightarrow R_3 + \frac{1-k}{2}R_2$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-k-1}{2} & k \end{pmatrix}$$

che ha rango 3. Pertanto, in tal caso, i vettori v saranno, per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$, del tipo

$$v = a(k, -k, 0, 0) + b(k, 1, 0, -1) + c(1, 1, 1, -2). \blacksquare$$

SOLUZIONE COME SCRITTO:

(a) La dimensione di U_k è il rango di

$$A = \begin{pmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1+k & 0 & k \end{pmatrix}$$

ovvero di

$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ k & 1 & -1 \\ 0 & 1+k & k \end{pmatrix}.$$

Ora

$$\begin{vmatrix} k & -k & 0 \\ k & 1 & -1 \\ 0 & 1+k & k \end{vmatrix} = k(k+1)^2$$

pertanto $\dim U_k = r(A) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq -1, 0 \\ 2 & \text{se } k = -1, 0 \end{cases}$ ed una sua base è

$$\{(k, -k, 0, 0), (k, 1, 0, -1), (0, 1+k, 0, k)\} \text{ se } k \neq -1, 0$$

e

$$\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, -1)\} \text{ se } k = -1, \{(0, 1, 0, -1), (0, 1, 0, 0)\} \text{ se } k = 0.$$

Per calcolare la dimensione ed una base di W risolviamo il sistema. Posto $X_2 = s, X_3 = t$ si trova $X_1 = s, X_4 = -2s$ e quindi un vettore di W è del tipo

$$(s, s, t, -2s) = s(1, 1, 0, -2) + t(0, 0, 1, 0).$$

Se ne deduce che $\dim W = 2$ ed una sua base è $\{(1, 1, 0, -2), (0, 0, 1, 0)\}$.

(b) Consideriamo la matrice che ha per righe i generatori di U_k e W ,

$$B = \begin{pmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1+k & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1+k & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3k^2 - 1, \quad \begin{vmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1+k & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k(4k+2)$$

quindi, non annullandosi simultaneamente, $r(B) = 4$, quindi $\dim(U_k + W) = 4$ per ogni k e

$$\dim(U_k \cap W) = \dim U_k + \dim W - \dim(U_k + W) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq -1, 0 \\ 2 & \text{se } k = -1, 0 \end{cases} + 2 - 4 = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq -1, 0 \\ 0 & \text{se } k = -1, 0 \end{cases}.$$

(c) Essendo $U_k + W = \mathbb{R}^4$ si ha che $\{(k, -k, 0, 0), (k, 1, 0, -1), (1, 1, 1, -2), v\}$ non sono generatori di $U_k + W$ se e solo se sono linearmente dipendenti, quindi, posto $v = (a, b, c, d)$, se e solo se

$$\begin{vmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = 0$$

ovvero se e solo se

$$ak + bk + 2ck^2 + d(k + k^2) = 0.$$

Si noti che se $k = 0$ qualsiasi v la soddisfa, mentre se $k \neq 0$ la condizione è

$$a + b + 2ck + d(1 + k) = 0. \blacksquare$$

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 0 & k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) prodotto di matrici elementari e, in tal caso, esprimere A come tale prodotto.

(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ k & k & 3 \end{pmatrix}.$$

Per quali k esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma, simultaneamente, A e tB in I_3 ?

SOLUZIONE:

(a) Facciamo operazioni elementari su A . Scambiando R_2 con R_3 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \rightarrow R_3 + R_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & k & k-1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \rightarrow R_3 + kR_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto se $k-1=0$, ovvero se $k=1$, si ha che $r(A)=2$ e quindi A non è prodotto di matrici elementari.

Assumiamo quindi $k \neq 1$ e continuiamo.

Con l'operazione $R_3 \rightarrow \frac{1}{k-1}R_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \rightarrow -R_2$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \rightarrow R_1 + R_3$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_1 \rightarrow R_1 - kR_2$, si ottiene I_3 .

Pertanto A è prodotto di matrici elementari se e solo se $k \neq 1$.

Dato che ogni operazione elementare equivale alla moltiplicazione a sinistra per la corrispondente matrice elementare, risalendo alle operazioni fatte, abbiamo allora che

$$R_{12}(-k)R_{13}(1)R_2(-1)R_3\left(\frac{1}{k-1}\right)R_{32}(k)R_{31}(1)R_{23}A = I_3$$

da cui

$$A = R_{23}^{-1}R_{31}(1)^{-1}R_{32}(k)^{-1}R_3\left(\frac{1}{k-1}\right)^{-1}R_2(-1)^{-1}R_{13}(1)^{-1}R_{12}(-k)^{-1}$$

e quindi

$$A = R_{23}R_{31}(-1)R_{32}(-k)R_3(k-1)R_2(-1)R_{13}(-1)R_{12}(k). \blacksquare$$

(b) Supponiamo che esista una sequenza di operazioni elementari che trasforma, simultaneamente, A e B in I_3 . Allora, tenendo conto che ogni operazione elementare equivale alla moltiplicazione a sinistra per la corrispondente matrice elementare, esiste una matrice R , prodotto di matrici elementari, tale che $RA = I_3$ e $R {}^tB = I_3$. Ma allora $RA = R {}^tB$, da cui, essendo R invertibile, $A = {}^tB$, contraddizione.

Pertanto per nessun k esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma, simultaneamente, A e tB in I_3 . $\blacksquare$

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e sia F un endomorfismo di V tale che $e_1 \in V_k(F)$ e

$$F(e_2 + e_4) = e_2 - e_3, F(e_2 + e_3) = ke_4, F(e_1 - e_2) = e_4 + e_1.$$

- (a) Determinare una matrice di F , il polinomio caratteristico e gli autovalori di F .
- (b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F ; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ .
- (c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{e_1, e_2 + e_4, e_2 + e_3, e_1 - e_2\}$ è una base di V in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Per ipotesi sappiamo che $e_1 \in V_k(F)$, ovvero che

$$F(e_1) = ke_1.$$

Per determinare la matrice associata ad F nella base e , esprimiamo

$$F(e_2 + e_4) = e_2 - e_3, F(e_2 + e_3) = ke_4, F(e_1 - e_2) = e_4 + e_1$$

nella base e . Si ha

$$ae_1 + b(e_2 + e_4) + c(e_2 + e_3) + d(e_1 - e_2) = (a + d)e_1 + (b + c - d)e_2 + ce_3 + be_4 = e_2 - e_3$$

se e solo se

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ b + c - d = 1 \\ c = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = 2, b = 0, c = -1, d = -2$. Pertanto

$$F(e_2 + e_4) = 2e_1 + 0(e_2 + e_4) - (e_2 + e_3) - 2(e_1 - e_2).$$

Analogamente

$$ae_1 + b(e_2 + e_4) + c(e_2 + e_3) + d(e_1 - e_2) = (a + d)e_1 + (b + c - d)e_2 + ce_3 + be_4 = ke_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ b + c - d = 0 \\ c = 0 \\ b = k \end{cases}$$

che ha soluzione $a = -k, b = k, c = 0, d = k$. Pertanto

$$F(e_2 + e_3) = -ke_1 + k(e_2 + e_4) + 0(e_2 + e_3) + k(e_1 - e_2).$$

Inoltre

$$ae_1 + b(e_2 + e_4) + c(e_2 + e_3) + d(e_1 - e_2) = (a + d)e_1 + (b + c - d)e_2 + ce_3 + be_4 = e_4 + e_1$$

se e solo se

$$\begin{cases} a + d = 1 \\ b + c - d = 0 \\ c = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = 0, b = 1, c = 0, d = 1$. Dunque

$$F(e_1 - e_2) = 0e_1 + (e_2 + e_4) + 0(e_2 + e_3) + (e_1 - e_2).$$

Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} k & 2 & -k & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora il polinomio caratteristico di F è (sviluppando prima per la prima colonna e poi per la seconda riga)

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} k-T & 2 & -k & 0 \\ 0 & -T & k & 1 \\ 0 & -1 & -T & 0 \\ 0 & -2 & k & 1-T \end{vmatrix} = (k-T)[k(1-T) - k - T(-T(1-T) + 2)] =$$

$$= (T-k)T(T^2 - T + k + 2).$$

Le radici reali di $(T-k)T(T^2 - T + k + 2) = 0$ sono $0, k$ e, se $k \leq -\frac{7}{4}$, $\frac{1 \pm \sqrt{-4k-7}}{2}$. Osserviamo che, per $k \leq -\frac{7}{4}$, si ha $\frac{1 \pm \sqrt{-4k-7}}{2} = 0$ se e solo se $k = -2$, mentre non è possibile che $\frac{1 \pm \sqrt{-4k-7}}{2} = k$.

Quindi gli autovalori di F sono

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k > -\frac{7}{4}, k \neq 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = k$ (m.a. 1)
$k = 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2)
$k = -\frac{7}{4}$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = -\frac{7}{4}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ (m.a. 2),
$k < -\frac{7}{4}, k \neq -2$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 1), $\lambda_2 = k$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{-4k-7}}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_4 = \frac{1 + \sqrt{-4k-7}}{2}$ (m.a. 1)
$k = -2$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = -2$ (m.a. 1), $\lambda_3 = 1$ (m.a. 1)

(b) L'unico caso da prendere è, per $k = -\frac{7}{4}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ come autovalore da considerare. Calcoliamo la base di $V_{\frac{1}{2}}(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore $\frac{1}{2}$ sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - \frac{1}{2}I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} -\frac{9}{4}x + 2y + \frac{7}{4}z = 0 \\ -\frac{1}{2}y - \frac{7}{4}z + w = 0 \\ -y - \frac{1}{2}z = 0 \\ -2y - \frac{7}{4}z + \frac{1}{2}w = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $x = \frac{2}{9}t, y = -\frac{1}{3}t, z = \frac{2}{3}t, w = t, t \in \mathbb{R}$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore $\frac{1}{2}$ sono tutti del tipo $t(\frac{2}{9}e_1 - \frac{1}{3}(e_2 + e_4) + \frac{2}{3}(e_2 + e_3) + (e_1 - e_2))$ e una base di $V_{\frac{1}{2}}(F)$ è $\{\frac{11}{9}e_1 - \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3 - \frac{1}{3}e_4\}$ e $\dim V_{\frac{1}{2}}(F) = 1$.

(c) Osserviamo che, nel caso analizzato in (b), si ha $m.g.(\frac{1}{2}) = 1 < 2 = m.a.(\frac{1}{2})$, mentre nei casi $k > -\frac{7}{4}, k \neq 0$, oppure $k = 0$ la somma delle molteplicità algebriche è minore di 4, quindi tale sarà anche la somma delle molteplicità geometriche. Dunque in tutti questi casi F non è diagonalizzabile. Nel caso $k = -2$ calcoliamo $m.g.(0)$. Come sappiamo

$$m.g.(0) = 4 - r\left(\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 < 2 = m.a.(0)$$

ed F non è diagonalizzabile. Infine nel caso $k < -\frac{7}{4}, k \neq -2$ si ha che F ha quattro autovalori distinti, quindi è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k < -\frac{7}{4}, k \neq -2$. ■

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine con coordinate X, Y, Z, W . Sia T_k il sottospazio di equazioni cartesiane

$$T_k : \begin{cases} X - kY + W = 0 \\ X - kZ = 2 \\ X - 2kY + kZ + 2W = k^2 - 3 \end{cases}$$

e sia S_k il sottospazio di equazioni parametriche

$$S_k : \begin{cases} X = t \\ Y = 2 + t + s \\ Z = ks \\ W = 1 + kt \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare per quali valori di k si ha che T_k è un sottospazio e calcolare le dimensioni di T_k e S_k .

(b) Determinare per quali valori di k (se esistono) si ha che S_k è parallelo a T_k .

(c) Determinare (se esistono) tutte le rette r di $\mathbf{A}$ tali che r è parallela a T_k e a S_k .

SOLUZIONE:

(a) Intanto osserviamo che S_k è il sottospazio (di dimensione 2) che passa per il punto $Q = Q(0, 2, 0, 1)$ ed ha giacitura $\text{giac}(S_k) = \langle e_1 + e_2 + ke_4, e_2 + ke_3 \rangle$.

La matrice completa del sistema che definisce T_k è

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 0 & 2 \\ 1 & -2k & k & 2 & k^2 - 3 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo operazioni elementari. Con le operazioni $R_2 \rightarrow R_2 - R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & -k & -1 & 2 \\ 0 & -k & k & 1 & k^2 - 3 \end{pmatrix}$$

da cui con l'operazione $R_3 \rightarrow R_3 + R_2$ si trova

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & -k & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 - 1 \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema è compatibile se e solo se $k^2 - 1 = 0$, ovvero se e solo se $k = \pm 1$. Se ne conclude che T_k è un sottospazio se e solo se $k = \pm 1$ e, in tal caso, ha dimensione $\dim T_{\pm 1} = 4 - r(B) = 2$.

Da ora in poi supporremo che $k = \pm 1$.

(b) Essendo $\dim T_k = \dim S_k$ ne segue che S_k è parallelo a T_k se e solo se hanno le stesse giaciture. Ma $(0, 1, k, 0)$, che corrisponde a $e_2 + ke_3$ non è soluzione del sistema omogeneo associato a T_k :

$$\begin{cases} X - kY + W = 0 \\ X - kZ = 0 \\ X - 2kY + kZ + 2W = 0 \end{cases}$$

in quanto, per esempio, non soddisfa la prima equazione (o si avrebbe $0 - k + 0 = 0$). Dunque $e_2 + ke_3 \notin \text{giac}(T_k)$ e se ne conclude che non esistono valori di k per cui S_k è parallelo a T_k .

(c) Notiamo che esiste una retta r parallela a T_k e a S_k se e solo se

$$(*) \quad \dim(\text{giac}(T_k) \cap \text{giac}(S_k)) \geq 1.$$

Infatti, se r esiste, essendo $\dim T_k = \dim S_k = 2$, allora la sua giacitura sarà contenuta in $\text{giac}(T_k) \cap \text{giac}(S_k)$, e quindi $\dim(\text{giac}(T_k) \cap \text{giac}(S_k)) \geq 1$. Viceversa se $\dim(\text{giac}(T_k) \cap \text{giac}(S_k)) \geq 1$, preso un vettore non nullo nell'intersezione e un qualsiasi punto di A , essi definiscono una retta parallela a T_k e a S_k .

Per verificare la $(*)$ calcoliamo la giacitura di T_k . Risolvendo il sistema omogeneo si trovano le equazioni parametriche

$$\begin{cases} X = kv \\ Y = u \\ Z = v \\ W = k(u - v) \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

e quindi la giacitura di T_k è $\langle e_2 + ke_4, ke_1 + e_3 - ke_4 \rangle$. Per calcolare l'intersezione consideriamo la matrice dei generatori

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ k & 0 & 1 & -k \end{pmatrix}.$$

Abbiamo, per la formula di Grassmann,

$$\dim(\text{giac}(T_k) \cap \text{giac}(S_k)) = 2 + 2 - \dim(\text{giac}(T_k) + \text{giac}(S_k)) = 4 - r(C) \geq 1$$

se e solo se $r(C) \leq 3$ ovvero se e solo se $\det C = 0$. Ma si verifica facilmente che $\det C = 1 - k$. Pertanto r esiste se e solo se $k = 1$. ■

6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ consideriamo i due sottospazi vettoriali

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0\}, \quad W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0, w = 0, x + z = 0\}.$$

(a) Scrivere esplicitamente una base di V/W .

(b) Esiste un isomorfismo $V/W \cong W$?

SOLUZIONE:

(a) I vettori di V sono tutti del tipo $yE_2 + zE_3 + wE_4$, da cui $\dim V = 3$, mentre i vettori di W sono tutti del tipo yE_2 , pertanto $\dim W = 1$, quindi $\dim V/W = 2$. Allora occorre trovare due classi $v_1 + W, v_2 + W$ linearmente indipendenti in V/W , quindi con $v_1, v_2 \in V$. Prendiamo $v_1 = E_3, v_2 = E_4$ e verifichiamo che $E_3 + W, E_4 + W$ sono linearmente indipendenti. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$a(E_3 + W) + b(E_4 + W) = 0 \in V/W$$

ovvero

$$aE_3 + bE_4 + W = W$$

cioè

$$aE_3 + bE_4 \in W.$$

Ma allora, per definizione di W , si ha $a = b = 0$. Pertanto $\{E_3 + W, E_4 + W\}$ è una base di V/W .

(b) Un isomorfismo $V/W \cong W$ non può esistere in quanto $2 = \dim V/W \neq \dim W = 1$. ■