UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2016-2017

Prova scritta del 16-6-2017

TESTO

Avvertenze:

A. Per il recupero del primo esonero svolgere gli esercizi 1,2,3;

B. Per il recupero del secondo esonero svolgere gli esercizi 4,5,6;

C. Per lo scritto svolgere gli esercizi 1,2,4,5.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - kX_2 + X_3 = 1 \\ kX_1 + X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 - kX_3 + X_4 = -1 \\ X_2 + kX_3 + X_4 = 1 \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

2. Sia $k \in\mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano

$$U_k =< (k, -k, 0, 0), (k, 1, 0, -1), (0, k + 1, 0, k) > .$$

e W il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 - X_2 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare le dimensioni di U_k, W e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $U_k + W$ e di $U_k \cap W$;

(c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$\{(k, -k, 0, 0), (k, 1, 0, -1), (1, 1, 1, -2), v\}$$

non sono generatori di $U_k + W$.

N.B. PER IL RECUPERO DEL I ESONERO utilizzare esclusivamente operazioni elementari. PER LO SCRITTO utilizzare un qualsiasi metodo imparato a lezione.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 0 & k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) prodotto di matrici elementari e, in tal caso, esprimere A come tale prodotto.

(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ k & k & 3 \end{pmatrix}.$$

Per quali k esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma, simultaneamente, A e ${}^tB$ in I_3?

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e sia F un endomorfismo di V tale che $e_1 \in V_k(F)$ e

$$F(e_2 + e_4) = e_2 - e_3, F(e_2 + e_3) = ke_4, F(e_1 - e_2) = e_4 + e_1.$$

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 4 e sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine con coordinate X, Y, Z, W. Sia T_k il sottospazio di equazioni cartesiane

$$T_k : \begin{cases} X - kY + W = 0 \\ X - kZ = 2 \\ X - 2kY + kZ + 2W = k^2 - 3 \end{cases}$$

e sia S_k il sottospazio di equazioni parametriche

$$S_k : \begin{cases} X = t \\ Y = 2 + t + s \\ Z = ks \\ W = 1 + kt \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare per quali valori di k si ha che T_k è un sottospazio e calcolare le dimensioni di T_k e S_k.

(b) Determinare per quali valori di k (se esistono) si ha che S_k è parallelo a T_k.

(c) Determinare (se esistono) tutte le rette r di $\mathbf{A}$ tali che r è parallela a T_k e a S_k.

6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ consideriamo i due sottospazi vettoriali

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0\}, \quad W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, w = 0, x + z = 0\}.$$

(a) Scrivere esplicitamente una base di V/W.

(b) Esiste un isomorfismo $V/W \cong W$?