UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2016-2017

Prova scritta del 17-7-2017

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + kX_3 = 1 \\ X_2 + kX_3 = k \\ 2X_1 - kX_2 + X_4 = -1 \\ kX_1 + X_2 + X_3 = 1 \end{cases}.$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Siano k un numero reale, $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X + Y - Z = 0 \\ Z + Y = 0 \end{cases}$$

e $U_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$U_k = < (1,0,0,2),\ (-1,0,k,1),\ (3,0,-k,k) > .$$

(a) Determinare una base di W ed una di U_k.

(b) Determinare le dimensioni di $U_k + W$ e di $U_k \cap W$.

(c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$< (-2,1,-1,1), v > \subseteq U_k \cap W.$$

3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 3 con riferimento affine $\{O, e_1, e_2, e_3\}$. Considerate le rette

$$r_k : \begin{cases} X = 2k - t \\ Y = 1 + t \\ Z = 1 + kt \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad s : \begin{cases} X - Y - Z = 1 \\ X + 2Y - Z = 2 \end{cases}$$

determinare:

(a) per quali valori di k si ha che r_k ed s sono complanari;

(b) le equazioni di tutti i piani p di $\mathbf{A}$ (se esistono) che contengono r_k ed s;

(c) se esiste un piano p' di $\mathbf{A}$ tale che p' contiene s e p' è incidente ad r_k per ogni k.

4. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_2 - e_4$, sia $U =< v_1, v_2 >$ e sia F un endomorfismo di V tale che

$$F_{|U} = id_U, F(v_1 + e_1) = e_1 - ke_2 + ke_3, F(e_3) = e_1 + ke_3.$$

(a) Determinare una matrice di F, il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.