UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2016-2017

Prova scritta del 29-1-2018

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + kX_2 - 2X_3 = 1 \\ -kX_2 - X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 - kX_2 - X_4 = 1 \\ X_2 + kX_3 + kX_4 = 1. \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -2 & 0 \\ 0 & -k & -1 & -1 \\ 1 & -k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & k & k \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\det(A) = 3(1-k^2) = 0 \text{ se e solo se } k = \pm 1.$$

Se $k \neq \pm 1$ si ha $r(A) = 4$ e quindi anche $r(Ab) = 4$ ed il sistema è compatibile con un'unica soluzione, che possiamo calcolare con la regola di Cramer

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & -2 & 0 \\ 0 & -k & -1 & -1 \\ 1 & -k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & k & k \end{vmatrix}}{3(1-k^2)} = \frac{3k^2+k-3}{3(k^2-1)}, \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & k & k \end{vmatrix}}{3(1-k^2)} = -\frac{1}{k^2-1},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & -k & 0 & -1 \\ 1 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}}{3(1-k^2)} = -\frac{k}{3(k^2-1)}, \quad X_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & -2 & 1 \\ 0 & -k & -1 & 0 \\ 1 & -k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{3(1-k^2)} = \frac{4k}{3(k^2-1)}.$$

Se $k = \pm 1$ consideriamo il minore di (Ab)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & k & k & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

e quindi $r(Ab) = 4$. Del resto sappiamo che $r(A) \leq 3$, quindi il sistema non è compatibile se $k = \pm 1$.

Si conclude che il sistema è compatibile se e solo se $k \neq \pm 1$. ■

2. Sia k un numero reale. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_4 = 0 \end{cases}$$

e sia

$$W_k = < (0,1,1,1), (1,1,0,k), (0,-1,-1,k) > .$$

(a) Determinare le dimensioni di U, W_k e scrivere esplicitamente due basi di tali sottospazi.

(b) Determinare le dimensioni di $W_k + U$ e di $W_k \cap U$;

(c) Determinare se esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che $V \neq \{0\}, V \neq \mathbb{R}^4$ e

$$(W_k \cap U) \oplus V = \mathbb{R}^4.$$

SOLUZIONE:

(a) Per calcolare la dimensione ed una base di U poniamo $X_3 = s, X_4 = t$ da cui deduciamo che i vettori di U sono tutti del tipo

$$(s, s+t, s, t) = s(1,1,1,0) + t(0,1,0,1).$$

Dunque $\{(1,1,1,0), (0,1,0,1)\}$ è una base di U e $\dim U = 2$.

Per calcolare la dimensione di W calcoliamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & k \\ 0 & -1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

usando il principio dei minori orlati intorno al minore $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Si ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

mentre

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 0 & -1 & k \end{vmatrix} = -1 - k = 0 \text{ se e solo se } k = -1.$$

Se ne deduce che $\dim W = r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = -1 \\ 3 & \text{se } k \neq -1 \end{cases}$ e basi di W sono $\{(0,1,1,1),(1,1,0,-1)\}$ se $k = -1$ e $\{(0,1,1,1),(1,1,0,k),(0,-1,-1,k)\}$ se $k \neq -1$.

(b) Calcoliamo il rango di

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & k \\ 0 & -1 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & k \end{vmatrix} = k = 0 \text{ se e solo se } \ k = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & k \end{vmatrix} = k + 1 = 0 \text{ se e solo se } \ k = -1.$$

Dunque $\dim(W_k + U) = r(B) = 4$ per ogni k e, per la formula di Grassmann,

$$\dim(W_k \cap U) = \dim W_k + \dim U - \dim(W_k + U) = \begin{cases} 0 & \text{se } k = -1 \\ 1 & \text{se } k \neq -1 \end{cases}.$$

(c) Se $k = -1$ non esiste $V \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $V \neq \{0\}, V \neq \mathbb{R}^4$ e $(W_{-1} \cap U) \oplus V = \mathbb{R}^4$, poichè si avrebbe che $V = \mathbb{R}^4$.

Se $k \neq -1$ si ha $\dim(W_k \cap U) = 1$ quindi basta scegliere una base $\{v_1\}$ di $W_k \cap U$, completarla ad una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ e prendere $V =< v_2, v_3, v_4 >$.

Si conclude che V esiste se e solo se $k \neq -1$. ■

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X - W = 0 \\ X + Y = 1 \end{cases}, T_k : \begin{cases} X + kW = -1 \\ Y - W = k \\ X + Y - W = -1 \end{cases}.$$

(a) Determinare per quali valori di k, se esistono, T_k è un sottospazio. Calcolare la dimensione di S e di T_k.
(b) Determinare per quali valori di k, se esistono, S è parallelo a T_k.
(c) Determinare, se esistono, tutte le possibili equazioni di un piano p in A che sia parallelo a S e T_k.

SOLUZIONE:

(a) Consideriamo S. Posto $Z = s, W = t$ si vede che le equazioni parametriche di S sono

$$S : \begin{cases} X = t \\ Y = 1 - t \\ Z = s \\ W = t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

da cui deduciamo che $\dim S = 2$ e che $\mathrm{giac}(S) =< e_1 - e_2 + e_4, e_3 >$.
Consideriamo ora le matrici del sistema che definisce T_k:

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } C_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & k \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $r(B_k) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases} = r(C_k)$. Per il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli, $T_k \neq \emptyset$ per ogni k. Dunque T_k è un sottospazio per ogni k e

$$\dim T_k = \dim A - r(B_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq 0 \\ 2 & \text{se } k = 0 \end{cases}.$$

(b) La giacitura di T_k è data dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\mathrm{giac}(T_k) : \begin{cases} X + kW = 0 \\ Y - W = 0 \\ X + Y - W = 0 \end{cases}.$$

Si vede subito che le soluzioni sono $X = Y = W = 0, Z = s$ se $k \neq 0$ e $X = 0, Y = t, W = t, Z = s$ se $k = 0$ e quindi

$$\mathrm{giac}(T_k) = \begin{cases} < e_3 > & \text{se } k \neq 0 \\ < e_2 + e_4, e_3 > & \text{se } k = 0 \end{cases}.$$

Ora, se $k \neq 0$ si ha $\mathrm{giac}(T_k) =< e_3 > \subseteq \mathrm{giac}(S)$, quindi S è parallelo a T_k.
Invece se $k = 0$ si ha che $e_2 + e_4 \notin \mathrm{giac}(S)$ dato che

$$r \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

quindi, in tal caso, S non è parallelo a T_k.
Si conclude che S è parallelo a T_k se e solo se $k \neq 0$.
(c) Se p è un piano parallelo a S e T_k si ha $\text{giac}(p) = \text{giac}(S)$ e, essendo p parallelo a T_k, si ha che S è parallelo a T_k, da cui $k \neq 0$. Viceversa se $k \neq 0$ basta prendere p un qualunque piano con la stessa giacitura di S.
Si conclude che tutte le possibili equazioni di un piano p in A che sia parallelo a S e T_0 sono del tipo

$$p : \begin{cases} X - W = a \\ X + Y = b \end{cases}$$

per $a, b, \in \mathbb{R}$. ■

4. Siano $k \in \mathbb{R}, v_1 = (1, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che

$$v_1 \in N(F), F(E_2) = E_1 + kE_3, F(E_3) = E_1 - v_1, F(E_2 + E_4) = -v_1,$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.
(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F. Inoltre, per un opportuno autovalore λ di F, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.
(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $v_1, E_2, E_3, E_2 + E_4$ sono linearmente indipendenti, e dunque una base di $\mathbb{R}^4$, in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Per determinare la matrice associata ad F osserviamo intanto che, per ipotesi, $F(v_1) = 0, F(E_3) = E_1 - v_1 = -E_2 - E_3$ e $F(E_2 + E_4) = -v_1$ sono già espresse nella base e.
Ora esprimiamo $F(E_2) = E_1 + kE_3, F(E_3) = E_1 - v_1$ nella base e. Si ha

$$av_1 + bE_2 + cE_3 + d(E_2 + E_4) = aE_1 + (a + b + d)E_2 + (a + c)E_3 + dE_4 = E_1 + kE_3$$

se e solo se

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b + d = 0 \\ a + c = k \\ d = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = 1, b = -1, c = k - 1, d = 0$. Pertanto

$$F(E_2) = 1v_1 - 1E_2 + (k-1)E_3 + 0(E_2 + E_4).$$

Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & k-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -T & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1-T & -1 & 0 \\ 0 & k-1 & -1-T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T \end{vmatrix} = T^2(T^2 + 2T + k).$$

Quindi gli autovalori di F sono 0 e $-1 \pm \sqrt{1-k}$ quando $1 - k \geq 0$, ovvero quando $k \leq 1$. Vediamo se ci possono essere coincidenze: si verifica subito che

$$-1 \pm \sqrt{1-k} = 0 \text{ se e solo se } k = 0$$

quindi

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k > 1$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2)
$k = 1$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = -1$ (m.a. 2)
$k = 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 3), $\lambda_2 = -2$ (m.a. 1)
$k < 1, k \neq 0$	$\lambda_1 = 0$ (m.a. 2), $\lambda_2 = -1 - \sqrt{1-k}$ (m.a. 1), $\lambda_3 = -1 + \sqrt{1-k}$ (m.a. 1)

(b) Consideriamo l'autovalore $\lambda_1 = 0$ e calcoliamo la base di $V_0(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 0 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - 0I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} y - w = 0 \\ -y - z = 0 \\ (k-1)y - z = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni $x = t, y = z = w = 0$ se $k \neq 0$ e $x = t, y = s, z = -s, w = s$ se $k = 0$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 0 sono tutti del tipo tv_1 se $k \neq 0$ e $tv_1 + s(2E_2 - E_3 + E_4)$ se $k = 0$. Ne segue che una base di $V_0(F)$ è $\{v_1\}$ se $k \neq 0$ e $\{v_1, 2E_2 - E_3 + E_4\}$ se $k = 0$ e pertanto $\dim V_0(F) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 1 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$.

(c) Per la diagonalizzabilità di F basta osservare che

$$m.g.(0) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 1 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} < \begin{cases} 3 & \text{se } k = 0 \\ 2 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} = m.a.(0)$$

quindi F non è diagonalizzabile per nessun k. ∎