UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2016-2017

Prima prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Determinare, utilizzando esclusivamente operazioni elementari, per quali valori $k \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 4X_3 = 1 \\ 3X_2 + kX_4 = k \\ X_1 - X_2 + kX_3 = 0 \\ 4X_1 - 4X_2 + 4X_3 - kX_4 = -1 \end{cases}.$$

e, quando è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Applichiamo operazioni elementari alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & k & k \\ 1 & -1 & k & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & -k & -1 \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_1, R_4 \to R_4 - 2R_1$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & k & k \\ 0 & -\frac{3}{2} & k-2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -6 & -4 & -k & -3 \end{pmatrix}$$

da cui l'operazione $R_3 \to 2R_3$ da

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & k & k \\ 0 & -3 & 2k-4 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -4 & -k & -3 \end{pmatrix}$$

e con le operazioni $R_3 \to R_3 + R_2, R_4 \to R_4 + 2R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 2k-4 & k & k-1 \\ 0 & 0 & -4 & k & 2k-3 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_4$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 2k & 0 & 2-k \\ 0 & 0 & -4 & k & 2k-3 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_3 con R_4 si trova la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & -4 & k & 2k-3 \\ 0 & 0 & 2k & 0 & 2-k \end{pmatrix}.$$

Se $k = 0$ la matrice B diventa

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ed il sistema è pertanto incompatibile.

Supponiamo ora $k \neq 0$ e facciamo l'operazione $R_4 \to \frac{1}{2k} R_4$ alla matrice B, ottenendo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & -4 & k & 2k-3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2-k}{2k} \end{pmatrix}$$

da cui scambiando R_3 con R_4 si trova

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2-k}{2k} \\ 0 & 0 & -4 & k & 2k-3 \end{pmatrix}$$

e infine, con l'operazione $R_4 \to R_4 + 4R_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2-k}{2k} \\ 0 & 0 & 0 & k & \frac{2k^2-5k+4}{k} \end{pmatrix}$$

Essendo $k \neq 0$ il sistema è a gradini, quindi si conclude che **il sistema è compatibile se e solo se $\mathbf{k \neq 0}$**. In tal caso ha come soluzioni (dopo un pò di calcoli):

$$\mathbf{X_4 = \frac{2k^2 - 5k + 4}{k^2}}, \ \mathbf{X_3 = \frac{2-k}{2k}}, \ \mathbf{X_2 = \frac{-k^2 + 5k - 4}{3k}}, \ \mathbf{X_1 = \frac{k^2 + 4k - 8}{6k}}. \ \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
(a) Usando solo operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, calcolarne l'inversa.

(b) Sia
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}.$$
Determinare i valori di k (se esistono) per i quali esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma AB in I_3.

SOLUZIONE:

(a) Applichiamo operazioni elementari alla matrice
$$(A\ I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Scambiando R_1 con R_3 si ha
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
e con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$ si trova
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
da cui, scambiando R_2 con R_3 si ottiene
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
e con l'operazione $R_2 \to \frac{1}{2}R_2$ si ha
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & k & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - kR_2$ da la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1-k & -\frac{k}{2} & 1 & \frac{k}{2} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo, dalla matrice C, che

$$r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 1 \\ 3 & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$$

e quindi **A è invertibile se e solo se k ≠ 1**.

Sia ora $k \neq 1$ e proseguiamo dalla matrice C, ponendo, per comodità, $d = 1 - k$.
Con l'operazione $R_3 \to \frac{1}{d}R_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{k}{2d} & \frac{1}{d} & \frac{k}{2d} \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_2 \to R_2 - R_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2d} & -\frac{1}{d} & -\frac{1}{2d} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{k}{2d} & \frac{1}{d} & \frac{k}{2d} \end{pmatrix}$$

e infine l'operazione $R_1 \to R_1 + R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2d} & -\frac{1}{d} & \frac{1-2k}{2d} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2d} & -\frac{1}{d} & -\frac{1}{2d} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{k}{2d} & \frac{1}{d} & \frac{k}{2d} \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{2(1-k)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1-2k \\ 1 & -2 & -1 \\ -k & 2 & k \end{pmatrix}.$$

(b) Notiamo che, fissata una qualsiasi matrice $C \in M_3$, se esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma C in I_3 allora $r(C) = r(I_3) = 3$. Viceversa se $r(C) = 3$ allora C è invertibile, quindi prodotto di matrici elementari, quindi anche C^{-1} è prodotto di matrici elementari. Ma $C^{-1}C = I_3$, quindi esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma C in I_3. Dunque esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma C in I_3 se e solo se $r(C) = 3$.

Applicando questo a $C = AB$ abbiamo che esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma AB in I_3 se e solo se $r(AB) = 3$. Osserviamo che

$$r(B) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 2 \\ 3 & \text{se } k \neq 2 \end{cases}.$$

Allora, se $k = 2$ o se $k = 1$, si ha

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} = 2$$

dunque, in tal caso, non esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma AB in I_3.

Invece se $k \neq 1, 2$ allora $r(A) = r(B) = 3$, quindi $A \in GL_3$ e pertanto

$$r(AB) = r(B) = 3$$

dunque, in tal caso, esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma AB in I_3.

Si conclude che **esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma AB in I_3 se e solo se $k \neq 1, 2$.** ■

3. Siano k un numero reale e siano

$$v_1 = (0, 1, 0, 2), v_2 = (-1, 1, 0, 1), v_3 = (-1, k + 1, 0, k) \in \mathbb{R}^4.$$

Sia $U_k \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2X - Y - kZ = 0 \\ X - kZ = 0 \\ X + kY = 0 \end{cases}$$

e sia $W_k =< v_1, v_2, v_3 >$.

(a) Determinare una base di U_k ed una di W_k.

(b) Determinare le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \cap W_k$.

(c) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste un sottospazio Z di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$U_k \oplus Z = W_k \oplus Z.$$

SOLUZIONE:

(a) Per calcolare la dimensione di W_k consideriamo la matrice dei suoi generatori

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & k+1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

e facciamo operazioni elementari. Scambiando R_1 con R_2 si trova

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & k+1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$, si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - kR_2$ da la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -k-1 \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che

$$\mathbf{dim(W_k) = r(A)} = \begin{cases} 2 & \textbf{se } k = -1 \\ 3 & \textbf{se } k \neq -1 \end{cases}.$$

Inoltre, sempre da A, dividendo l'ultima riga per $-k-1$ se $k \neq -1$, deduciamo che **una base di $\mathbf{W_k}$ è**

$$\{(\mathbf{-1, 1, 0, 1}), (\mathbf{0, 1, 0, 2})\} \textbf{ se } \mathbf{k = -1} \textbf{ e } \{(\mathbf{-1, 1, 0, 1}), (\mathbf{0, 1, 0, 2}), \mathbf{E_4}\} \textbf{ se } \mathbf{k \neq -1}.$$

Per calcolare la dimensione di U_k risolviamo invece il suo sistema facendo operazioni elementari su

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scambiando R_1 con R_3 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - 2R_1$, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & -k & 0 & 0 \\ 0 & -1-2k & -k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - 2R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & -k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_3 si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k & 0 & 0 \\ 0 & -k & -k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - kR_2$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k-k^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora, se $-k - k^2 \neq 0$, ovvero se $k \neq 0, -1$, si ha, posto $W = t$, l'unica soluzione $W = t, Z = 0, Y = 0, X = 0$, quindi ogni vettore di U_k è del tipo $(0,0,0,t) = tE_4$. Pertanto **una base di $\mathbf{U_k}$ è**

$$\{\mathbf{E_4}\} \text{ e } \dim \mathbf{U_k} = \mathbf{1} \text{ se } \mathbf{k} \neq \mathbf{0}, -\mathbf{1}.$$

Invece se $k = 0, -1$, posto $W = t, Z = s$, si trova $Y = ks, X = -k^2 s$, quindi ogni vettore di U_k è del tipo

$$(-k^2 s, ks, s, t) = s(-k^2, k, 1, 0) + tE_4$$

e, essendo $(-k^2, k, 1, 0), E_4$ linearmente indipendenti, **una base di $\mathbf{U_0}$ è**

$$\{\mathbf{E_3}, \mathbf{E_4}\} \text{ e } \dim \mathbf{U_0} = \mathbf{2}$$

mentre **una base di $\mathbf{U_{-1}}$ è**

$$\{(-\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}), \mathbf{E_4}\} \text{ e } \dim \mathbf{U_{-1}} = \mathbf{2}.$$

(b) Per calcolare la dimensione di $W_k + U_k$, utilizziamo le basi di W_k e U_k trovate in (a). Osserviamo intanto che, se $k \neq 0, -1$ si ha $E_4 \in W_k$, quindi $U_k \subseteq W_k$, pertanto $\dim(\mathbf{W_k} + \mathbf{U_k}) = \dim \mathbf{W_k} = \mathbf{3}$ **e** $\dim(\mathbf{W_k} \cap \mathbf{U_k}) = \dim \mathbf{U_k} = \mathbf{1}$ **se** $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}, -\mathbf{1}$.

Se $k = 0$ facciamo operazioni elementari sulla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_5 \to R_5 - R_3$ si trova

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_3 con R_4, abbiamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si vede subito che $\mathbf{dim}(\mathbf{W_0} + \mathbf{U_0}) = \mathbf{r}(\mathbf{B}) = \mathbf{4}$ e la formula di Grassmann da

$$\mathbf{dim}(\mathbf{W_0} \cap \mathbf{U_0}) = \dim W_0 + \dim U_0 - \dim(W_0 + U_0) = 3 + 2 - 4 = \mathbf{1}.$$

Se $k = -1$ facciamo operazioni elementari sulla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$ si trova

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 + 2R_2$ abbiamo la matrice

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

si vede subito che $\mathbf{dim(W_{-1} + U_{-1}) = r(C) = 4}$ e la formula di Grassmann da

$$\mathbf{dim(W_{-1} \cap U_{-1})} = \dim W_{-1} + \dim U_{-1} - \dim(W_{-1} + U_{-1}) = 2 + 2 - 4 = \mathbf{0}.$$

(c) Sia Z un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ tale che $U_k \oplus Z = W_k \oplus Z$. Ne segue che

$$\dim U_k + \dim Z = \dim(U_k \oplus Z) = \dim(W_k \oplus Z) = \dim W_k + \dim Z$$

e quindi $\dim U_k = \dim W_k$. In base alla parte (a) deduciamo che

$$k = -1, \dim U_k = \dim W_k = \dim Z = 2.$$

Ora mostriamo che, per $k = -1$, Z esiste. Sia $Z =< E_2, E_3 >$. Si ha che $W_{-1} + Z$ ha dimensione pari al rango di

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che scambiando R_2 con R_3 diventa

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$ si trova

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_3 con R_4 si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 4. Pertanto, per la formula di Grassmann, $\dim(W_{-1} \cap Z) = 0$ e quindi $W_{-1} \oplus Z = \mathbb{R}^4$. Analogamente si ha che $U_{-1} + Z$ ha dimensione pari al rango di

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che scambiando R_2 con R_3 e poi R_3 con R_4 diventa

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 4. Pertanto, per la formula di Grassmann, $\dim(U_{-1} \cap Z) = 0$ e quindi $U_{-1} \oplus Z = \mathbb{R}^4$. Ma allora $W_{-1} \oplus Z = U_{-1} \oplus Z$.

Si conclude che **Z esiste se e solo se** $\mathbf{k = -1}$. ■