UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2016-2017

Prima prova di esonero

TESTO

1. Determinare, utilizzando esclusivamente operazioni elementari, per quali valori $k \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 4X_3 = 1 \\ 3X_2 + kX_4 = k \\ X_1 - X_2 + kX_3 = 0 \\ 4X_1 - 4X_2 + 4X_3 - kX_4 = -1 \end{cases}.$$

e, quando è compatibile, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Usando solo operazioni elementari, determinare i valori di k per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, calcolarne l'inversa.

(b) Sia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori di k (se esistono) per i quali esiste una sequenza di operazioni elementari che trasforma AB in I_3.

3. Siano k un numero reale e siano

$$v_1 = (0,1,0,2), v_2 = (-1,1,0,1), v_3 = (-1,k+1,0,k) \in \mathbb{R}^4.$$

Sia $U_k \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2X - Y - kZ = 0 \\ X - kZ = 0 \\ X + kY = 0 \end{cases}$$

e sia $W_k =< v_1, v_2, v_3 >$.

(a) Determinare una base di U_k ed una di W_k.

(b) Determinare le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \cap W_k$.

(c) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste un sottospazio Z di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$U_k \oplus Z = W_k \oplus Z.$$