UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2016-2017

Seconda prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $v = e_1 + e_4$. Sia F un endomorfismo di V tale che $v \in N(F - 2\ \mathrm{Id}_V)$ e

$$F(e_2) = e_2 - v, F(e_3 + e_4) = e_3 - ke_4, F(e_3 - e_2) = kv + e_1.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $e = \{v, e_2, e_3 + e_4, e_3 - e_2\}$ è una base di V in quanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Per determinare la matrice associata ad F osserviamo intanto che, per ipotesi, $(F - 2\ \mathrm{Id}_V)(v) = 0$, cioè $F(v) - 2v = 0$, quindi

$$F(v) = 2v \text{ e } F(e_2) = -v + e_2.$$

Ora esprimiamo $F(e_3 + e_4) = e_3 - ke_4$ e $F(e_3 - e_2) = (k+1)e_1 + ke_4$ nella base e. Si ha

$$av + be_2 + c(e_3 + e_4) + d(e_3 - e_2) = ae_1 + (b - d)e_2 + (c + d)e_3 + (a + c)e_4 = e_3 - ke_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} a = 0 \\ b - d = 0 \\ c + d = 1 \\ a + c = -k \end{cases}$$

che ha soluzione $a = 0, b = 1 + k, c = -k, d = 1 + k$. Pertanto

$$F(e_3 + e_4) = 0v + (1 + k)e_2 - k(e_3 + e_4) + (1 + k)(e_3 - e_2).$$

Inoltre

$$av + be_2 + c(e_3 + e_4) + d(e_3 - e_2) = ae_1 + (b - d)e_2 + (c + d)e_3 + (a + c)e_4 = (k + 1)e_1 + ke_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} a = k + 1 \\ b - d = 0 \\ c + d = 0 \\ a + c = k \end{cases}$$

che ha soluzione $a = k + 1, b = 1, c = -1, d = 1$. Pertanto

$$F(e_3 - e_2) = (k + 1)v + e_2 - (e_3 + e_4) + (e_3 - e_2).$$

Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & k+1 \\ 0 & 1 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & -k & -1 \\ 0 & 0 & k+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 2-T & -1 & 0 & k+1 \\ 0 & 1-T & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & -k-T & -1 \\ 0 & 0 & k+1 & 1-T \end{vmatrix} = (2 - T)(1 - T)\big(T^2 + (k - 1)T + 1\big).$$

Quindi gli autovalori di F sono $2, 1$ e $\frac{1}{2}(1 - k \pm \sqrt{k^2 - 2k - 3})$ quando $k^2 - 2k - 3 \geq 0$, ovvero quando $k \leq -1$ o $k \geq 3$. Vediamo se ci possono essere coincidenze: si verifica subito che

$$\frac{1}{2}(1 - k \pm \sqrt{k^2 - 2k - 3}) = 2 \text{ se e solo se } k = -\frac{3}{2}$$

e

$$\frac{1}{2}(1 - k \pm \sqrt{k^2 - 2k - 3}) = 1 \text{ se e solo se } k = -1.$$

Pertanto si ha

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$k < -1, k \neq -\frac{3}{2}$ o $k > 3$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{1}{2}(1 - k - \sqrt{k^2 - 2k - 3})$ (m.a. 1),
	$\lambda_4 = \frac{1}{2}(1 - k + \sqrt{k^2 - 2k - 3})$ (m.a. 1)
$k = -\frac{3}{2}$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 2), $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ (m.a. 1)
$k = -1$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 3), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 1)
$-1 < k < 3$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 1)
$k = 3$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 1), $\lambda_3 = -1$ (m.a. 2)

(b) Prendiamo $\lambda_1 = 1$ nel caso $k = -1$ come autovalore da considerare nel punto (b) e calcoliamo la base di $V_1(F)$. Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore 1 sono soluzioni del sistema $(M_e(F) - 1I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

quindi gli autovettori di F associati all'autovalore 1 sono tutti del tipo $y(v+e_2)+z(e_3+e_4)$ e una base di $V_1(F)$ è $\{v + e_2, e_3 + e_4\}$.

(c) Dalla (a) deduciamo che i casi da analizzare sono:

1) $k < -1, k \neq -\frac{3}{2}$ o $k > 3$.

In questo caso F ha quattro autovalori distinti, quindi F è diagonalizzabile.

2) $k = -\frac{3}{2}$.

Calcoliamo la molteplicità geometrica di $\lambda_2 = 2$. Posto $T = 2$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

che si vede subito avere rango 3 e quindi $mg(2) = 4 - r(M_e(F) - 2I_4) = 1 < 2 = ma(2)$. Dunque F non è diagonalizzabile.

3) $k = -1$.

Dalla (b) sappiamo che $mg(1) = 2 < 3 = ma(1)$. Dunque F non è diagonalizzabile.

4) $-1 < k < 3$.

In questo caso F ha due autovalori di molteplicità algebrica, e quindi geometrica, 1, quindi F non è diagonalizzabile dato che la somma delle dimensioni degli autospazi di F è 2.

5) $k = 3$.

Calcoliamo la molteplicità geometrica di $\lambda_3 = -1$. Posto $T = -1$ nella matrice $M_e(F) - TI_4$ si ottiene

$$M_e(F) + I_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

che si vede subito avere rango 3 e quindi $mg(-1) = 4 - r(M_e(F) + I_4) = 1 < 2 = ma(2)$. Dunque F non è diagonalizzabile.

Se ne conclude che F è diagonalizzabile se e solo se $k < -1, k \neq -\frac{3}{2}$ o $k > 3$. ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia $\{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Si considerino i seguenti punti di A:

$P_0 = P_0(1,1,0,0), P_1 = P_1(0,1,0,1), P_2 = P_2(0,1-k,-k,1-k)$ e $P_3 = P_3(0,1+k,k,-k^2+2k+1)$.

(a) Determinare i valori di k per i quali P_0, P_1, P_2, P_3 sono allineati.

(b) Determinare i valori di k per i quali P_0, P_1, P_2, P_3 sono complanari.

(c) Sia W_k il sottospazio di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X + W = 1 \\ Y - kZ = 1 \end{cases}.$$

Determinare per quali k si ha che W_k è parallelo al sottospazio generato da P_0, P_1, P_2, P_3.

SOLUZIONE:

(a) e (b) Ricordiamo che il sottospazio generato da P_0, P_1, P_2, P_3 è il sottospazio passante per P_0 di giacitura $< \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} >$. Inoltre

$$P_0, P_1, P_2, P_3 \text{ sono allineati se e solo se } \dim < \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} > \leq 1,$$

$$P_0, P_1, P_2, P_3 \text{ sono complanari se e solo se } \dim < \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} > \leq 2.$$

Ora la dimensione di $< \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} >$ è data dal rango della matrice corrispondente alle loro coordinate

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -k & -k & 1-k \\ -1 & k & k & -k^2+2k+1 \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k & -k & -k \\ 0 & k & k & -k^2+2k \end{pmatrix}$$

da cui l'operazione $R_3 \to R_3 + R_2$ da la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k & -k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k^2+k \end{pmatrix}$$

e si vede subito che

$$\dim < \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} >= r(B) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 2 & \text{se } k = 1 \\ 3 & \text{se } k \neq 0, 1 \end{cases}$$

e si conclude che

$$P_0, P_1, P_2, P_3 \text{ sono allineati se e solo se } k = 0,$$

$$P_0, P_1, P_2, P_3 \text{ sono complanari se e solo se } k = 0, 1.$$

(c) La giacitura di W_k è data dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$(*)_0 \quad : \begin{cases} X + W = 0 \\ Y - kZ = 0 \end{cases}.$$

Posto $X = t, Z = s$ si ha $W = -t, Y = ks$ e quindi un vettore della giacitura di W_k è del tipo

$$te_1 + kse_2 + se_3 - te_4 = t(e_1 - e_4) + s(ke_2 + e_3)$$

e pertanto $\text{giac}(W_k) =< e_1 - e_4, ke_2 + e_3 >$. Dalla matrice B deduciamo invece che

$$\text{giac}(\overline{P_0P_1P_2P_3}) =< \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3} >=< e_4 - e_1, -k(e_2 + e_3 + e_4), (-k^2 + k)e_4 >$$

Ora vediamo i vari casi:

- $k = 0$. Allora $\text{giac}(\overline{P_0P_1P_2P_3}) =< e_4 - e_1 >\subset \text{giac}(W_0)$, quindi $\overline{P_0P_1P_2P_3}$ e W_0 sono paralleli;

- $k = 1$. Se $\overline{P_0P_1P_2P_3}$ e W_1 fossero paralleli, avendo entrambi dimensione 2, avrebbero la stessa giacitura. Ma si verifica subito che $(0, -1, -1, -1)$ non è soluzione di $(*)_0$, quindi non sono paralleli;

- $k \neq 0, 1$. Se $\overline{P_0P_1P_2P_3}$ e W_k fossero paralleli, avendo il primo dimensione 3 e il secondo dimensione 2, si avrebbe che $< e_1 - e_4, ke_2 + e_3 >\subset< e_4 - e_1, -k(e_2 + e_3 + e_4), (-k^2 + k)e_4 >=< e_4 - e_1, e_2 + e_3 + e_4, e_4 >$ e quindi $ke_2 + e_3 \in< e_4 - e_1, e_2 + e_3 + e_4, e_4 >$. Ma

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - k \neq 0$$

e quindi $ke_2 + e_3 \notin < e_4 - e_1, e_2 + e_3 + e_4, e_4 >$, da cui $\overline{P_0P_1P_2P_3}$ e W_k non sono paralleli. Si conclude che $\overline{P_0P_1P_2P_3}$ e W_k sono paralleli se e solo se $k = 0$. ■

3. Siano U, V, W tre spazi vettoriali con V di dimensione finita. Siano $G : U \to V$ e $F : V \to W$ due applicazioni lineari. La successione

$$U \xrightarrow{G} V \xrightarrow{F} W$$

si dice *esatta* se G è iniettiva, F è suriettiva e $\mathrm{Im}(G) = N(F)$.

Dimostrare che, in una successione esatta, si ha

(a) U e W hanno dimensione finita.

(b) $\dim V = \dim U + \dim W$.

(c) Trovare un esempio di una successione $U \xrightarrow{G} V \xrightarrow{F} W$, tale che U, V, W sono non nulli, G è iniettiva, F è suriettiva, $F \circ G = O$ (applicazione nulla), ma la successione non è esatta.

SOLUZIONE:

(a) e (b): F è suriettiva, quindi $W = \mathrm{Im}(F)$. Per il teorema dell'omomorfismo si ha che $W = \mathrm{Im}(F) \cong V/N(F)$. Dato che V ha dimensione finita, ne segue che anche $N(F)$ ha dimensione finita e $\dim(V/N(F)) = \dim V - \dim N(F)$. Pertanto W ha dimensione finita e

$$(1) \qquad \dim W = \dim V - \dim N(F).$$

G è iniettiva, quindi $N(G) = \{0\}$, da cui, sempre per il teorema dell'omomorfismo si ha che $U \cong U/\{0\} = U/N(G) \cong \mathrm{Im}(G)$. Ma $\mathrm{Im}(G)$ è un sottospazio di V, quindi ha dimensione finita e pertanto

$$(2) \qquad \dim U = \dim \mathrm{Im}(G) = \dim N(F).$$

Da (1) e (2) segue che $\dim V = \dim U + \dim W$.

(c) Siano $U = W = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3$ e definiamo G ed F sulle basi canoniche. Sia $G(E_1) = E_1, F(E_1) = F(E_2) = 0, F(E_3) = E_1$. Si vede subito che $N(G) = \{0\}$, quindi G è iniettiva, $\mathrm{Im}(F) = \mathbb{R}$, da cui F è suriettiva e $F \circ G(E_1) = F(E_1) = 0$, pertanto $F \circ G = O$. Ma $\mathrm{Im}(G) =< E_1 > \subset < E_1, E_2 >= N(F)$ e non sono uguali, quindi la successione non è esatta.

■