GE110 - Geometria 1: Soluzioni Tutorato 10

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Lucia Carsetti
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

23 Maggio 2017

Esercizio 1 *Siano A e B due matrici simili. Si dimostri che:*

- $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$;
- $tr(A) = tr(B)$;
- A^n *e* B^n *sono simili.*

Soluzione 1 *Osserviamo innanzitutto che se A e B sono simili allora $\exists C$ matrice invertibile tale che $A = CBC^{-1}$.*

- *Si vede che* $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = det(CBC^{-1} - \lambda CIC^{-1}) = det(C(B - \lambda I)C^{-1} = det(C)det(B - \lambda I)det(C)-1 = P_B(\lambda)$.
- *Si ha che* $tr(A) = tr(CBC^{-1}) = tr(C(BC^{-1})) = tr((BC^{-})C) = tr(B)$.
- *Se A e B sono simili allora* $A^n = (CBC^{-1})^n = C^nB^nC-n$ *cioè A^n e B^n sono simili.*

Esercizio 2 *Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quali di queste matrici sono diagonalizzabili?

Soluzione 2

- *Dal calcolo del polinomio carattestistico e imponendo $det(A - \lambda I) = 0$ si trova che gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 2$,$\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$ e $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$. Per trovare gli autovettori dobbiamo risolvere i sistemi lineari omogenei corrispondenti $(A-\lambda_j I)(x, y, z) = 0$ per $j = 1, 2, 3$ e si trova che $v_{\lambda_1} = (1, 0, -1)$, $v_{\lambda_2} = (1, \sqrt{2}, 1)$ e $v_{\lambda_3} = (1, -\sqrt{2}, 1)$. Siccome gli autovalori sono tutti semplici (con molteplicità algebrica uguale a 1) allora A è diagonalizzabile.*
- *Con lo stesso procedimento di prima, si ha che gli autovalori di B sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$ e i rispettivi autovettori sono dati da $v_{\lambda_1} = (0, 1, 0)$,$v_{\lambda_2} = (1, 0, \frac{-3+\sqrt{17}}{4})$ e $v_{\lambda_3} = (1, 0, \frac{-3-\sqrt{17}}{4})$. Anche in questo caso gli autovalori sono semplici quindi B è diagonalizzabile.*
- *Gli autovalori di C sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$ e gli autovettori sono dati da $v_{\lambda_1} = (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)$ e $v_{\lambda_2} = (0, 1, 1, 0)$. Poichè la somma delle dimensioni degli autospazi non dà la dimensione di tutto lo spazio (cioè 4) allora C non è diagonalizzabile.*

Esercizio 3 *Si consideri la matrice simmetrica* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- *Dire se* A *è invertibile e, in caso affermativo, determinare* A^{-1};
- *Calcolare gli autovalori e gli autospazi di* A;
- *Determinare una matrice* P *tale che* $P^{-1}AP = D$, *dove* D *è diagonale.*

Soluzione 3 *Calcoliamo innanzitutto gli autovalori di* A: $det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 9\lambda 2 - 15\lambda - 7$ *e si vede che le sue radici sono* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = 7$. *In corrispondenza di tali autovalori si trovano le basi dei rispettivi autospazi: ad esempio una base di* V_{λ_1} *è data da* $\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ *mentre una base di* V_{λ_2} *è* $\{(-2, 2, 1)\}$. *Quindi si ha che la matrice* A *è diagonalizzabile, in particolare* $A = PDP^{-1}$ *con* $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. *Infine per determinare l'inversa basta osservare che* $A^{-1} = P^{-1}D^{-1}P$.

Esercizio 4 *Sia* $f \in End(\mathbb{R}^3)$ *associato alla matrice* $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- *Determinare gli autovalori di* f *e le relative molteplicità.*
- *Determinare gli autospazi di* f *e trovare, se esiste, una base* B *di* $\mathbb{R}^3$ *formata da autovettori di* f.
- *Calcolare una matrice* P *invertibile tale che* $P^{-1}M(f)P$ *sia diagonale.*

Soluzione 4

- *Gli autovalori sono* $\lambda_1 = 1$ *con molteplicità uguale a* 1 *e* $\lambda_2 = 2$ *con molteplicità* 2.
- *Risolvendo i sistemi lineari corrispondenti agli autovalori si ottiene* $v_{\lambda_1} = (1, 1, 1)$ *e* $v_{\lambda_2} = (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ *che dà una base di* $\mathbb{R}^3$.
- *Direttamente dal punto precedente prendiamo* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 5 *Siano* $k \in \mathbb{R}$, $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ *e sia* $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *un'applicazione lineare tale che*

$$v_1 \in N(F),\ v_2 \in N(F),\ F(e_2) = e_2 + ke_4,\ F(e_4) = e_2 + v_1$$

dove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *è la base canonica di* $\mathbb{R}^4$.

- *Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di* F.
- *Trovare la dimensione degli autospazi di* F.
- *Determinare i valori di* k *per i quali* F *è diagonalizzabile.*

Soluzione 5 *Soluzioni secondo esonero* 2011/12 *esercizio* 1.

Esercizio 6 *Stabilire se le seguenti applicazioni da* $M_3(\mathbb{R})$ *in* $\mathbb{R}$ *sono lineari e, in caso affermativo, dire se sono suriettive e trovare il nucleo.*

- *L'applicazione determinante* $det : A \longrightarrow det(A)$.
- *L'applicazione traccia* $Tr : A \longrightarrow Tr(A)$.

Soluzione 6

- *Sappiamo che in generale* $det(A+B) \neq det(A) + det(B)$, *quindi l'applicazione non è lineare.*
- *Per definizione di traccia è evidente che* $Tr(A+B) = Tr(A)+Tr(B)$ *e* $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$, *dunque l'applicazione Traccia è lineare. Inoltre è suriettiva in quanto per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *possiamo considerare la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ *che è tale che* $Tr(A) = x$.
  Per il teorema di nullità più rango si ha che: $dim(\ker(Tr)) = dim(M_3(\mathbb{R})) - dim(\mathbb{R}) = 8$ *e ciò significa che gli elementi del nucleo variano al variare di* 8 *parametri e in effetti possiamo descrivere gli elementi di* $\ker(Tr)$ *attraverso una matrice della forma*
  $$\begin{pmatrix} x+y & a & b \\ c & -x & d \\ e & f & -y \end{pmatrix}$$
  al variare di $a, b, c, d, e, f, x, y \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7 *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, *con* $a \in \mathbb{R}$

- *Determinare per quali valori del parametro* a *la matrice* A *ammette autovalore* $\lambda = 1$.
- *Posto* $a = 0$, *esistono tre autovettori di* A *linearmente indipendenti?*

Soluzione 7

- *È sufficiente per quali valori di* $a \in \mathbb{R}$ *si ha che* $det(A - 1I) = 0$. *Da un calcolo diretto si vede che questo accade per* $a = 0$.
- *Posto* $a = 0$ *esistono tre vettori linearmente indipendenti se e solo se la matrice* A *è diagonalizzabile. Si trova che gli autovalori di* A *sono* $\lambda_1 = 1$ *con molteplicità* 2 *e* $\lambda_2 = 2$ *con molteplicità* 1, *quindi* A *è diagonalizzabile a patto che la dimensione dell'autospazio associato all'autovalora* $\lambda_1 = 1$ *sia pari a* 2. *Poichè* $rg(A - I) = 2$ *si ha che* $dim(V_{\lambda_1}) = 1$ *quindi* A *non è diagonalizzabile* $\Rightarrow$ *non esiste una base formata da autovettori.*

Esercizio 8 *Sia* a *un numero reale, sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *e siano* $v = e_2 - e_3$, $w = (a-5)e_1 + \frac{7}{4}e_2 + 4e_3$.
Sia $F : V \longrightarrow V$ *un'applicazione lineare tale che*

$$F(e_1 + v) = w, \ F(e_1) = ae_1 + 2e_3, \ F(e_2 + e_3) = e_1 + \frac{1}{4}e_2$$

(a) Determinare una matrice di F;

(b) Trovare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, *basi per gli autospazi di F;*

(c) Determinare i valori di a *per cui* F *è digonalizzabile.*

Soluzione 8 *Soluzioni secondo esonero* 2004/05.