GE110 - Geometria 1: Tutorato 11

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Lucia Carsetti
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

26 Maggio 2017

Esercizio 1 (Secondo esonero a.a. 2003-2004) *Siano U, V e W tre spazi vettoriali reali e siano $G : U \longrightarrow V$, $F : V \longrightarrow W$ due applicazioni lineari.*

(a) Si dimostri che se $F \circ G$ é suriettiva allora F é suriettiva;

(b) Si supponga ora che F é suriettiva. Si dimostri che $F \circ G$ é suriettiva se e solo se $N(F) + ImG = V$;

(c) Si costruisca un esempio esplicito in cui $F \circ G$ é suriettiva e $N(F) \oplus ImG = V$.

Soluzione: Vedere Es.3 Secondo esonero a.a. 2003-2004
http://www.mat.uniroma3.it/didattica_interattiva/aa_03_04/ge1/GE1sec-esonero-testoesoluz.pdf

Esercizio 2 (Appello A a.a. 2012-2013) *Siano V e W due spazi vettoriali reali, $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare e $U \subset V$ un sottospazio tale che $Im(F)$ e $N(F) \oplus U$ hanno la stessa dimensione (finita).*

(a) Dimostrare che esiste un sottospazio U' di V tale che $N(F) \subset U'$ e $V/U' \cong N(F) \oplus U$;

(b) Dimostrare che se V ha dimensione finita allora U' é unico e $dimV + dimU$ é pari.

Soluzione: Vedere Es.6 Appello A a.a. 2012-2013
http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/lopez/corsi/GE110-2012-13/13-6-2013-Testo-e-soluzioni.pdf

Esercizio 3 (Secondo esonero a.a. 2011-2012) *Siano V e Wdue spazi vettoriali reali di dimensione finita, $dimV \geq 2$ e $dimW \geq 2$ e siano $F, G : V \longrightarrow W$ due applicazioni lineari tali che $F \neq G$ e $N(F) = N(G)$.*

(a) Dimostrare che se $W = Im(F) \oplus Im(G)$ allora $dimW$ è pari e $dimW \leq 2dimV$.

(b) Sia ora W di dimensione dispari. E' possibile che $dim(Im(F) \oplus Im(G)) = dimW - 1$?

Soluzione: Vedere Es.3 Secondo esonero a.a. 2011-2012
http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/geometria/esamiGE110/secondo-esonero-soluzioni.pdf

Esercizio 4 (Secondo esonero a.a. 2012-2013) *Sia $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, -1, 0, 2) \in \mathbb{R}^4$, sia $U =< v_1, v_2 >$ e sia F un'applicazione lineare tale che:*

$$F_{|U} = id_U,\ F(e_3) \in < e_3 >,\ F(e_2) = e_1 - 2e_4,$$

dove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Scelto un opportuno parametro $k \in \mathbb{R}$:

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F;

(b) Trovare le dimensioni degli autospazi di F; inoltre, individuato un autovalore $\lambda \neq 0$ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F é diagonalizzabile.

Soluzione: Vedere Es.1 Secondo esonero 2012-2013
http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/lopez/corsi/GE110-2012-13/secondo-esonero-soluzioni.pdf

Esercizio 5 (Secondo esonero a.a 2014-2015) *Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i due sottospazi con le seguenti equazioni:*

$$S : \begin{cases} X - Y + W = 2 \\ X + Y - Z = 0 \end{cases} \qquad T_k : \begin{cases} X - Y - Z = 2 \\ Y + W = 0 \\ kX + (2-k)Y + Z + 2W = -1 \end{cases}$$

(a) Determinare i valori di k per i quali S e T_k sono sottospazi affini di A e, in tal caso, calcolare la loro dimensione.

(b) Determinare se esiste un k tale che S e T_k sono paralleli.

(c) Determinare per quali k esiste una retta r tale che $r \subseteq S$ e $r \subseteq T_k$.

Soluzione: Vedere Es.2 Secondo esonero a.a. 2014-2015
http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/lopez/corsi/GE110-2014-15/secondo-esonero-soluzioni.pdf

Esercizio 6 (Secondo esonero a.a. 2013-1014) *Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i sottospazi con le seguenti equazioni:*

$$S : \begin{cases} X - Y + Z = -1 \\ X + Y = 2 \end{cases} \qquad T_k : \begin{cases} (k+1)X + (k-1)Y + Z + kW = -1 \\ 3X + 3Y = 6 \end{cases}$$

(a) Calcolare la dimensione di S e di T_k.

(b) Determinare per quali valori di k si ha che S è parallelo a T_k.

(c) Determinare le equazioni di tutte le rette r in A tali che r sia parallela a S e T_k.

Soluzione: Vedere Es.2 Secondo esonero a.a. 2013-2014
http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/lopez/corsi/GE110-2013-14/secondo-esonero-soluzioni.pdf

Esercizio 7 (Secondo esonero a.a. 2013-2014) *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano $v = 2e_1 + e_3$ e $w \in V$ tale che $w \notin < e_1, e_2, e_3 >$. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia F un endomorfismo di V tale che*

$$v \in N(F),\ F(e_2) = ke_2 + w,\ F(e_1 + e_3) = e_1 + (2-2k)e_2 + e_3 + \frac{7}{4}w,\ F(w) = v + 2e_2 + e_1 + e_3.$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

Soluzione: Vedere Es.2 Secondo esonero a.a. 2013-2014
http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/lopez/corsi/GE110-2013-14/secondo-esonero-soluzioni.pdf