Universitá degli Studi di Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2016-2017 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Lucia Carsetti e Gaudenzio Falcone

SOLUZIONI TUTORATO 1
7 MARZO 2017

1. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcolare dove possibile :

- $A^t, C^t, AC, A^tC, A^tC^t, C^tA^t$;
- ACD, $3(AC+B)D^2$

Soluzione:

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $C^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $AC = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

A^tC e A^tC^t non si possono fare.

$C^tA^t = (AC)^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; $ACD = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 22 \\ 18 & -2 & 24 \\ 9 & 3 & 66 \\ 9 & 1 & -12 \end{pmatrix}$;

$$3(AC+B)D^2 = 3\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} -3 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 \\ -24 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

2. Trovare due matrici di ordine 3 il cui prodotto sia la matrice nulla.

Soluzione: Basta scegliere, per esempio, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Siano A e B due matrici quadrate di uguale dimensione. E' vero che:

(a) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$;
(b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

Altrimenti qual è l'ipotesi da richiedere?
Soluzione: Non è vero perché il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa, pertanto, in generale, non vale $AB = BA$, quindi $AB + BA \neq 2AB$ e $AB - BA \neq 0$.

4. Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Si verifica se $AA^t = \mathbb{I}_3$ e si trova che A e C sono ortogonali.

5. Si trovi per quali valori del parametro k la matrice A è simmetrica e B antisimmetrica.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & k^4 - 3k + 1 & 2 \\ k^4 + 2k - 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} k^3 + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k & -2 & k^3 + 4k^2 + k - 8 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & k^3 - 5k^2 + 4k & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Una matrice A si dice simmetrica se $A^t = A$, mentre si dice antisimmetrica se $A^t = -A$. Affinché A sia simmetrica deve essere $k^4 - 3k + 1 = k^4 + 2k - 3 \Updownarrow k = \frac{4}{5}$ Affinché B sia antisimmetrica deve avere innanzitutto la diagonale composta da soli zeri, quindi $k^3 + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k = 0$ e questo accade per $k = 0, \frac{1}{2}, -1$, ma per nessuno di questi valori si ha $k^3 - 5k^2 + 4k = -4$ e $k^3 + 4k^2 + k - 8 = 3$. Quindi non esiste nessun valore di k per cui la matrice B è antisimmetrica.

6. Una matrice quadrata A si dice nilpotente se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $A^k = 0$. Mostrare che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ è nilpotente di ordine 3 (i.e. $A^3 = 0$).
Dimostrare che $A \in M_n(K)$ nilpotente non è invertibile.

Soluzione: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, e $A^3 = 0$. Supponiamo per assurdo che A nilpotente di ordine n sia invertibile, ovvero esiste una matrice B tale che $AB = \mathcal{I}_n$. Ma allora $A^n B = 0B = 0$, d'altra parte $0 = A^n B = A^{n-1}(AB) = A^{n-1}\mathcal{I}_n = A^{n-1}$ è quindi avrei che n non è il più piccolo naturale per cui $A^n = 0$.

7. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B una matrice tale che $AB = BA$.
Si dimostri che $B = \lambda \mathbb{I}_2 + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\forall \lambda, x \in \mathbb{R}$.

Soluzione: Prendiamo una generica matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ c & d \end{pmatrix}$. Mentre $BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a + b \\ c & c + d \end{pmatrix}$.
Dalla condizione che $AB = BA$ si ha $\begin{cases} a + c = a \\ c = c \\ b + d = a + b \\ d = c + d \end{cases}$
Quindi $c = 0$, $a = d = s$, $b = t$, da cui $B = \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ponendo $\lambda = s$ e $t = x$ si ha la soluzione cercata.

8. Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_2(\mathbb{R})$)

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto alla somma e al prodotto di matrici.
Soluzione: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ 0 & c + c' \end{pmatrix} \in I$, quindi I è chiuso rispetto alla

somma.

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in I$, quindi I è chiuso rispetto al prodotto.

9. Si mostri che l'inversa di una matrice simmetrica e invertibile è ancora una matrice simmetrica.
Soluzione: Se A è una matrice invertibile si ha

$$\mathbb{I} = \mathbb{I}^t = (AA^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t$$

quindi $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, per unicità dell'inversa. Quindi $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$, perché per ipotesi A è una matrice simmetrica.

10. Dimostrare che una matrice diagonale
$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(K)$
è invertibile se e solo se $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, ed in tal caso la sua inversa è
$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^{-1} \end{pmatrix}$
Soluzione: A è invertibile se e solo se esiste una matrice B t.c. $AB = BA = \mathbb{I}$.
$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & \dots & a_1 b_{1n} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} & \dots & a_2 b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n b_{n1} & a_n b_{n2} & \cdots & a_n b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
cioè se e solo se $a_i b_{ii} = 1 \; \forall i = 1, \dots, n$ per cui $a_i \neq 0$ (quindi $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$) e $b_{ii} = a_i^{-1}$, mentre $b_{ij} = 0 \; \forall i \neq j$.