GE110 - Geometria 1: Tutorato 2

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Lucia Carsetti
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

14 Marzo 2017

Esercizio .1 *Determinare l'inversa delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Soluzione: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 01 & 0 & \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

Quindi la matrice inversa di A è $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$.

Applichiamo lo stesso metodo alla matrice B:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 7R_3} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{6}R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{-8}{3} & \frac{-1}{6} & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + \frac{5}{42}R_2} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{21} & \frac{-1}{6} & \frac{5}{42} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -21R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 22 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 22R_3} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -77 & 56 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 8 & -5 & -7 \\ 0 & -7 & 0 & -77 & 56 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{7}R_2} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 8 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{6}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice inversa è $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 11 & -8 & -10 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Esercizio .2 *Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la seguente matrice è invertibile e calcolare la matrice inversa per tali valori:(Errata corrige: l'elemento di posto 1,3 è +2 e non -2)*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & k & k \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione: In modo analogo all'esercizio precedente, svolgendo le operazioni elementari $R_1 \to -R_1$, $R_3 \to R_3 - kR_1$, $R_2 \leftrightarrow R_3$, $R_2 \to R_2 - R_3$, e $R3 \to R_3 - kR_2$ si arriva a $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & (k-k^2) & -k^2 & (1+k) & -k \end{pmatrix}$.

Per $k^2 - k \neq 0$ (cioè $k \neq 0, 1$) la matrice è invertibile e possiamo continuare usando $R_3 \to \frac{1}{k-k^2}R_3$, $R_2 \to R_2 - kR_3$, $R_1 \to R_1 + 2R_3$, e $R1 \to R_1 + R_2$ ottenendo così:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{k}{k-k^2} & \frac{2}{k-k^2} & -\frac{k}{k-k^2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{k^2}{k-k^2} & -\frac{2k}{k-k^2} & \frac{k}{k-k^2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{k^2}{k-k^2} & \frac{1+k}{k-k^2} & -\frac{k}{k-k^2} \end{pmatrix}.$$

Quindi se $k \neq 0, 1$ la matrice data è invertibile con inversa $\begin{pmatrix} -\frac{k}{k-k^2} & \frac{2}{k-k^2} & -\frac{k}{k-k^2} \\ \frac{k^2}{k-k^2} & -\frac{2k}{k-k^2} & \frac{k}{k-k^2} \\ -\frac{k^2}{k-k^2} & \frac{1+k}{k-k^2} & -\frac{k}{k-k^2} \end{pmatrix}$

Esercizio .3 *Si determinino tutte le soluzioni, se esistono, dei seguenti sistemi di equazioni lineari:*

- $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + 2y - z + t = -1 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ 3x - 4y + 3z - 3t = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y + 6z = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x - 2y + z + 4t = 0 \\ x - y - 4z + 2t = 0 \\ -x - y + 3z - 2t = 0 \\ 3x - 3y + z + 6t = 0 \end{cases}$

Soluzione:

- Il sistema ammette l'unica soluzione $(-1, -5, 9)$.
- Il sistema ammette ∞^2 soluzioni del tipo $(-\frac{1}{5} + \frac{1}{5}t - \frac{1}{5}z, -\frac{2}{5} - \frac{3}{5}t + \frac{3}{5}z, z, t)$.
- Il sistema ammette l'unica soluzione $(-1/6, 0, 1/6)$.
- Il sistema ammette ∞^1 soluzioni del tipo $(-2t, 0, 0, t)$.

Esercizio .4 *Discutere al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi di equazioni lineari utilizzando il metodo di Gauss-Jordan:*

- $\begin{cases} kx - y + z = 2 \\ x - ky + z = 3 - k^2 \\ x - y + kz = k + 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y + z = k \\ x + y - z = 1 \\ 2x + y + kz = k + 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} kx - y - z + 3t = 0 \\ 2x - kz + 2t = k + 4 \\ kx + y + t = -k \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

Soluzione: $\begin{pmatrix} k & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -k & 1 & 3-k^2 \\ 1 & -1 & k & k+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 3-k^2 \\ k & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & k & k+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 3-k^2 \\ 0 & -1+k^2 & 1-k & k^3-3k+2 \\ 0 & -1+k & k-1 & k^2+k-2 \end{pmatrix} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 3-k^2 \\ 0 & -1+k & k-1 & k^2+k-2 \\ 0 & -1+k^2 & 1-k & k^3-3k+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 3-k^2 \\ 0 & -1+k & k-1 & k^2+k-2 \\ 0 & 0 & -k^2-k+2 & 2(-k^2-k+2) \end{pmatrix}$
Se $k^2+k-2 \neq 0$, cioè $k \neq 1, -2$, il sistema ammette l'unica soluzione della forma $(1, k, 2)$.

Se $k^2+k-2=0$ abbiamo che per $k=1$ ci sono ∞^2 soluzioni del tipo $(2-z-y, y, z)$, mentre per $k=-2$ ci sono ∞^1 del tipo $(-1+z, -z, z)$.

Il secondo sistema ammette la soluzione $(k - \frac{k^2}{2} + \frac{1}{2}, \frac{k^2-k}{2}, \frac{k-1}{2})$ per ogni valore di k.

Nel terzo sistema, per k = 3 le ∞^1 soluzioni sono date da $(-(5t+8)/8, 7t/8, (t-12)/4, t)$.
Per $k=2$ non esiste una soluzione.
Per $k \neq 2, 3$ l'unica soluzione è data da $(-(3k+8)/(2k-4), 7k/(4k-4), 0, (k^2+5k)/(4k-4))$.

Esercizio .5 *Scrivere le seguenti matrici come prodotto di matrici elementari:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalla teoria, sappiamo che compiere un'operazione elementare sulle righe di una matrice equivale a moltiplicarla per la corrispondente matrice elementare (ovvero la matrice che si ottiene della matrice identità applicando l'operazione sulle righe). Osserviamo che entrambe le matrici date sono invertibili, quindi è possibile decomporle nel prodotto di matrici elementari. Cominciamo con il trasformare la matrice A nella matrice identità, eseguendo le seguenti operazioni elementari sulle righe:
$R_1 \leftrightarrow R_2$, $R_2 \to R_2 - 2R_1$, $R_2 \to -1/5R_2$, $R_1 \to R_1 - 4R_2$. Scrivendo la sequenza di operazioni elementari che trasforma A in $\mathbb{I}$ come prodotto di matrici elementari abbiamo:

$$R_{12}(-4)R_2(-1/5)R_{21}(-2)R_{12}A = \mathbb{I}$$

Poiché l'inversa di una matrice elementare è ancora una matrice elementare(dello stesso tipo) si ha:

$$A = R_{12}^{-1}R_{21}(-2)^{-1}R_2(-1/5)^{-1}R_{12}(-4)^{-1} = R_{21}R_{21}(2)R_2(-5)R_{12}(4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per B lo svolgimento è analogo: con $R_2 \to R_2 - 3R_1$, $R_2 \to -1/8R_2$, $R_1 \to R_1 - 3R_2$ si trasforma B nella matrice identità, quindi

$$B = R_{21}(3)R_2(-8)R_{12}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio .6 *Risolvere il seguente sistema con il metodo dell'inversa:*
$\begin{cases} x + y - \frac{z}{2} = 1 \\ 12y - z = 12 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$

Soluzione: Consideriamo la matrice associata al sistema $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 12 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e la colonna dei termini noti $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$. Se la matrice A è invertibile, la soluzione del sistema è $X = A^{-1}b$, dove X è il vettore colonna delle indeterminate.

In questo caso, la matrice A è invertibile con inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{36}{16} & \frac{15}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{12}{16} & \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{12}{4} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ e si ottiene l'unica soluzione $(0, 1, 0)$.

Esercizio .7 *Verificare che la somma di vettori geometrici è commutativa e associativa, e che la moltiplicazione per un numero reale è distributiva. Si ricorda che l'insieme dei vettori geometrici del piano è l'insieme delle classi di equivalenza dei vettori applicati modulo la relazione di equipollenza.*

Soluzione: Verificare in un caso particolare, scegliendo dei vettori. Tenere conto che se $\overrightarrow{AB}$ è un vettore e k un numero naturale, $k\overrightarrow{AB}$ è parallelo ad $\overrightarrow{AB}$, ha lunghezza moltiplicata per $\mid k \mid$ ed ha stesso verso se k è positivo, verso opposto se k è negativo.