GE110 - Geometria 1: Soluzioni Tutorato 3

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Lucia Carsetti
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

21 Marzo 2017

Esercizio .1 *Si considerino i seguenti insiemi di matrici quadrate di ordine n (reali o complesse):*

(a) *Matrici antisimmetriche;*

(b) *Matrici triangolari superiori;*

(c) *Matrici invertibili;*

(d) *Matrici con elemento (1; 1) uguale a 0;*

(e) *Matrici con elemento (1; 1) uguale a 1 (matrice nulla compresa).*

Si dica quali dei precedenti sono sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale M_n delle matrici quadrate di ordine n.

Soluzione .1 *Basta osservare, per ciascuno dei seguenti insiemi, se sono chiusi rispetto alla somma di matrici e al prodotto per gli scalari del campo che si sta considerando e se ciascuno di essi possiede il vettore nullo. Sono pertanto sottospazi vettoriali di $M_n(K)$ gli insiemi del punto a, b e d. L'insieme delle matrici invertibili, invece, non è un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$ in quanto, ad esempio, non è detto che la somma di matrici invertibili sia invertibile, così come l'insieme delle matrici con elemento di posto $1, 1$ uguale a 1: infatti date due matrici $A, B \in M_n(K)$ tali che $A(1,1) = B(1,1) = 1 \Rightarrow (A+B)(1,1) = 2$.*

Esercizio .2 *Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali e, in caso affermativo, trovarne una base.*

(a) $\{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ *;*
(b) $\{(x,y,z) \mid x - 7y + z = 1\}$*;*
(c) $\{(t,t,t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ *;*
(d) $\mathbb{R}^3 - (0,0,1)$*;*
(e) $H1 \cup H2 \cup H3 : Hi = \{(x_1, x_2, x_3) : xi = 0\}$*;*
(f) $\{(x,y,z) \mid x + y - 5z = 0 \; 2(x+y) = 0\}$ *;*
(g) $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ *;*
(h) $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *.*

Soluzione .2 *Anche in questo caso basta controllare se ciascuno dei seguenti insiemi è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per gli scalari del campo $\mathbb{R}$:*

(a) *Non è uno sottospazio vettoriale in quanto presi $(1,0,0), (-1,0,0)$ si ha che la loro somma non appartiene all'insieme.*

(b) *Non è un sottospazio vettoriale in quanto si tratta di un piano in $\mathbb{R}^3$ non passante per l'origine.*

(c) *Questo insieme rappresenta un cubo in $\mathbb{R}^3$ di lato uguale a 1 che non è un sottospazio vettoriale in quanto, ad esempio non è chiuso rispetto al prodotto per scalari.*

(d) *Non è un sottospazio vettoriale in quanto presi $(0,0,2),(0,0,-1)$ si ha che la loro somma, essendo proprio il vettore $(0,0,1)$, non appartiene all'insieme.*

(e) *Non è un sottospazio vettoriale in quanto presi $(0,1,1),(1,0,1)$ la loro somma, non avendo nessuna componente uguale a 0, non appartiene all'insieme.*

(f) *È un sottospazio vettoriale in quanto rappresenza lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. La sua dimensione è uguale a 1 e una base è costituita dal vettore $(1,-1,0)$.*

(g) *Consistendo del solo punto $(0,0,0)$ è lo spazio vettoriale nullo.*

(h) *Non è un sottospazio vettoriale in quanto non è chiuso rispetto al prodotto per scalari.*

Esercizio .3 *Si stabilisca se i seguenti insiemi di vettori generano tutto $\mathbb{R}^3$, se sono linearmente dipendenti o indipendenti e se ne costituiscono una base. Nel caso siano dipendenti, si scriva uno di questi come combinazione lineare degli altri.*

- $v_1 = (1,3,2)$, $v_2 = (2,1,-1)$, $v_3 = (1,2,-2)$
- $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (2,0,6)$, $v_3 = (2,3,0)$
- $v_1 = (4,2,1)$, $v_2 = (2,1,1)$, $v_3 = (4,0,5)$, $v_4 = (1,1,0)$
- $v_1 = (3,-5,2)$, $v_2 = (1,3,-1)$

Soluzione .3 *Per ciascuna terna di vettori bisogna impostare il sistema lineare omogeneo*

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$$

e discuterne le soluzioni. Se tale sistema ammette solo la soluzione banale $(0,0,0)$ vuol dire che i tre vettori sono linearmente indipendenti, altrimenti basta trovare una soluzione non banale per scrivere un vettore come combinazione lineare degli altri due.

Esercizio .4 *In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che l'insieme $K = \{A, B, C, D\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$ e si esprima la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ nella base di K.

Soluzione .4 *Si imposta ancora una volta il sistema lineare omogeneo dato da:*

$$xA + yB + zC + tD = 0$$

dove lo 0 indica la matrice nulla. In particolare sarà un sistema di quattro equazioni (date dall'annullamento di ciascun termine della matrice $xA + yB + zC + tD$) in quattro incognite. Chiaramente se si tratta di una base, il sistema avrà solo la soluzione banale $(0,0,0,0)$.
Per scrivere E rispetto a tale base si imposta un altro sistema lineare

$$xA + yB + zC + tD = E.$$

Anche questo è un sistema di quattro equazioni in quattro incognite, la cui unica soluzione è data da $(-\frac{11}{21}, -\frac{13}{7}, -\frac{8}{21}, \frac{17}{21})$.

Esercizio .5 *Dati i seguenti vettori:*
$a = (1, 3, 2)$*;* $b = (-2, k-6, k+4)$*;* $c = (-1, k-3, k^2+k+1)$*;* $d = (0, -2, k-1)$ *determinare i valori del parametro* $k \in \mathbb{R} : a, b, c$ *sono linearmente indipendenti.*
Posto $k = 2$ *determinare le componenti del vettore* d *rispetto alla base* a, b, c*.*

Soluzione .5 *Si imposta come prima il sistema lineare omogeneo*

$$xa + yb + zc = 0$$

e se ne discutono le soluzioni. In particolare i tre vettori sono linearmente indipendenti per $k \neq 0, \pm\sqrt{5}$*.*
Posto $k = 2$*, per determinare le componenti di* d *rispetto alla base* $\{a, b, c\}$ *si imposta ancora una volta un sistema lineare:*

$$xa + yb + zc = d.$$

Risolvendolo si vede che esso ammette una e una sola soluzione che è (9,10,-11) e questo ci consente di scrivere il vettore d *come segue:* $d = 9a + 10b - 11c$*.*

Esercizio .6 *Dimostrare che:*
$\mathbb{R}^4 = U \bigoplus W$ *con* $U =< (1, 0, \sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0, -1, 0) >$ *e* $W =< (0, -2, 0, 3), (0, 1, 0, 1) >$ *.*

Soluzione .6 *Dalla definizione segue che*

$$U \bigoplus W =< (1, 0, \sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0, -1, 0), (0, -2, 0, 3), (0, 1, 0, 1) > .$$

Basta quindi dimostrare che i 4 *vettori sono linearmente indipendenti per concludere l'esercizio.*

Esercizio .7 *Siano* W_1 *il sottospazio di* $\mathbb{R}^3$ *generato dai vettori* $a = (1, 1, -1)$*,* $b = (2, -1, 1)$ *e* W_2 *il sottospazio di* $\mathbb{R}^3$ *generato da* $c = (1, 2, -2)$*,* $d = (-1, -1, 2)$*. Trovare* $W_1 \cap W_2$ *e una sua base.*

Soluzione .7 *Si osservano i seguenti fatti:*

- *I vettori* a, b *e* c, d *sono rispettivamente linearmente indipendenti quindi* $dim_{\mathbb{R}} W_1 = dim_{\mathbb{R}} W_2 = 2$*;*
- *I vettori* a, b, c *sono linearmente dipendenti e ciò significa che* $c \in W_1$*, mentre* a, b, d *generano tutto* $\mathbb{R}^3$ *quindi* $d \notin W_1$*;*
- *Da quanto osservato precedentemente, possiamo scrivere* $W_1 \cap W_2 = \{c\}$*.*

Esercizio .8 *In* $\mathbb{R}^5$ *si consideri l'insieme:*
$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}$*.*

- *Si verifichi che* W_1 *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^5$*, se nedetermini una base e la dimensione.*
- *Sia* $W_2 =< a, b, c, d >$*, dove* $a = (0, 3, 1, -2, 0)$*,* $b = (0, 0, 2, 1, 1)$*,* $c = (0, 6, -10, -10, -6)$*,* $d = (0, 3, 7, 1, 3)$*. Se ne determini una base e la dimensione.*
- *Si provi che* $W_1 \bigoplus W_2 = \mathbb{R}^5$*.*
- *Si determini un sottospazio* W_3 *di* $\mathbb{R}^5$ *t.c.* $dim(W_1 \cap W_3) = 1$ *e* $dim(W_3) = 3$*.*

Soluzione .8 *Si verifica facilmente che si tratta di un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^5$*. La sua dimensione è tre e una base è data da:*

$$\{(1, -2, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

.

- *Impostiamo il sistema lineare omogeneo* $x_1a + x_2b + x_3c + x_4d = 0$. *Le soluzioni sono date da:*
$$\begin{cases} x_1 = -2v - t \\ x_2 = 6v - 3t \\ x_3 = v \\ x_4 = t \end{cases}$$
Si nota pertanto che, i vettori d *e* c, *sono combinazione lineare dei vettori* a *e* b *rispettivamente per le scelte di* $(t, v) = (0, 1), (1, 0)$. *Quindi* $dim_{\mathbb{R}} W_2 = 2$ *e una base è* $\{a, b\}$.
- *Basta osservare che i vettori della base di* W_1 *e quelli della base di* W_2 *sono indipendenti, pertanto si ha* $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, *da cui la tesi.*
- *Definiamo* W_3 *mediante la sua base:*
$$W_3 =< (0, 3, 1, -2, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 2, 1, 1) > .$$