GE110 - Geometria 1: Soluzioni Tutorato 4

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Lucia Carsetti
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

28 Marzo 2017

Esercizio .1 *Siano U e V sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$.*

- *Provare che $U \cap V \neq \emptyset$*
- *Determinare tutte le possibili intersezioni di $U \cap V$ e costruire un esempio per ciascuna di esse.*

Soluzione:

- Abbiamo che $dim(U) = dim(V) = 2$. Supponiamo per assurdo che $dim(U \cap V) = 0$. Per la formula di Grassman avremmo che $dim(U \bigoplus V) = 4$, ma questo è assurdo perché $U \bigoplus V$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e non può avere dimensione maggiore di 3.
- Possiamo avere $dim(U \cap V) = 1, 2$. Nel caso $dim(U \cap V) = 1$, quindi $dim(U + V) = 3$, possiamo prendere $U =< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$ e $V =< (0, 0, 1), (0, 1, 0) >$.
  Nel caso $dim(U \cap V) = 2$, quindi $dim(U + V) = 2$, basta prendere $U = V$ qualsiasi di dimensione 2.

Esercizio .2 *Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi vettoriali:*

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y = 2t = 0\}$$

$$K =< (1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5) >$$

- *Determinare la dimensione e una base per H e K*
- *Determinare la dimensione e una base per $H \cap K$ e $H + K$*
- *Il vettore $v = (1, 2, 3, 4)$ appartiene a $H + K$? In caso affermativo scrivere v come somma di un vettore di H e di un vettore di K.*

Soluzione: H è l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari in $\mathbb{R}^4$ quindi è un sottospazio vettoriale di dimensione $= 4 - 2 = 2$. I vettori soluzione sono della forma $(-2y, y, z, 0)$. Per ottenere una base imponiamo una volta $y = 1$ e $z = 0$, e una volta $y = 0$ e $z = 1$, ottenendo $\{(-2, 1, 0, 0)(0, 0, 1, 0)\}$.
$K =< (1, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (1, -1, 0, 5) >$ e quindi $dim(K) = 3$.

La dimensione di $H + K$ è il rango della matrice che ha per righe i vettori delle due basi, in questo caso $dim(H+K) = 4$. Per la formula di Grassman $dim(H \cap K) = 1$. Poiché $H+K = \mathbb{R}^4$, come base di $H+K$ possiamo prendere semplicemente la base canonica, mentre per trovare una base di $H \cap K$ dobbiamo trovare un vettore che si scriva come combinazione lineare di elementi di H e K : $v = a(-2, 1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 0) = c(1, 2, 0, 1) + d(0, 0, 1, 1) + e(1, -1, 0, 5)$. Risolvendo il sistema troviamo $e = 5c, a = -3c, b = d = -26c$. Ponendo $c = 1$ otteniamo $v = (-6, 3, 26, 0)$ che è una base di $H \cap K$.

Il vettore $v = (1, 2, 3, 4)$ appartiene a $H + K$ perché $H + K = \mathbb{R}^4$, però dal momento che la somma non è diretta non esiste un unico modo per scrivere v come somma di un elemento di H e uno di K. Ad esempio, possiamo scrivere $v = (1, 2, 3, 4) = 1 \cdot (1, 2, 0, 1) + 3 \cdot (0, 0, 1, 1)$.

Esercizio .3 *Calcolare il rango delle seguenti matrici:*

- $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Soluzione: La prima matrice ha rango 3, la seconda ha rango 2, e la terza ha rango 2.

Esercizio .4 *Si determinino le componenti dei vettori* $v_1 = (3, 2, -5), v_2 = (1, 0, -\frac{1}{2}), v_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ *rispetto alle seguenti basi:*

- *La base canonica di* $\mathbb{R}^3$
- *La base* $\{(1, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 2, 1)\}$.

Soluzione:

- $v_1 = 3e_1 + 2e_2 - 5e_3$ quindi le coordinate di v_1 rispetto la base canonica sono $(3, 2, -5)$. Le coordinate di v_2 sono $(1, 0, -1/2)$, quelle di v_3 sono $(1, 1, 1)$.
- Per trovare le coordinate rispetto la nuova base dobbiamo risolvere il sistema associato alla combinazione lineare $v_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ trovando $a = -18, b = 21, c = 10$.
  Analogamente per v_2 si trova che le coordinate sono $a = -3, b = 4, c = 3/2$.
  Le coordinate di v_3 sono $a = -1, b = 2, c = 1$.

Esercizio .5 *Dire quali tra i seguenti insiemi di vettori risultano essere una base di* $\mathbb{R}$*; si completino a base di* $\mathbb{R}^4$ *gli insiemi di vettori che non sono una base.*

- $\{(1, 0, 8, 9), (2, 3, 4, 0), (2, 0, 1, 2), (1, 7, 5, 9)\}$
- $\{(1, 0, 0, 1), (2, 3, 3, 2), (0, -1, -1, 0)\}$
- $\{(h, 0, 1, 0), (1, 3, 2, 0), (1, 0, h, 0), (1, 3h, 2h, 0)\}$ *al variare di* $h \in R$.

Soluzione:

- Sono linearmente indipendenti quindi sono una base.
- Sono dipendenti. Una base è data da $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
- Sono dipendenti $\forall h \in \mathbb{R}$. Per $h \neq 1$ si può completare così: $\{(h, 0, 1, 0), (1, 3, 2, 0), (1, 0, h, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
  Per $h = 1$ possiamo scegliere $\{(1, 3, 2, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Esercizio .6 *In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i vettori*

$$a = (1,1,1,0), b = (0,1,1,1), c = (1,1,0,0).$$

- *Verificare che a, b, c sono linearmente indipendenti*
- *Completare $\{a, b, c\}$ a base di $\mathbb{R}^4$*
- *Dire se il sottospazio $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = z + t = 0\}$ è contenuto in $K =< a, b, c >$.*

Soluzione:

- Si imposta il sistema omogeneo (con matrice dei coefficienti la matrice che ha per colonne i vettori a, b, c) e si vede che l'unica soluzione è quella banale, quindi i vettori sono l.i.
- Per completare a una base di $\mathbb{R}^4$, si deve aggiungere un vettore d che sia linearmente indipendente con gli altri tre, ad esempio $d = (0,0,0,1)$.
- $H = \{(x, 0, -t, t)\} =< (1,0,0,0), (0,0,-1,1) >$. Per stabilire se H è contenuto in K, dobbiamo verificare se i vettori che generano H sono una combinazione dei vettori di K. Si trova che $(1,0,0,0) \notin K$ e quindi H non è contenuto in K.

Esercizio .7 *Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi:*

$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z = x + y - t = 0\}$$

$$K =< (0,0,1,1), (1,1,0,0) >$$

Determinare la dimensione e una base di $H + K$. Tale somma è diretta?

Soluzione: $dim(H) = 4 - 2 = 2$ e, esplicitando z e t rispetto x e y, trovo che i vettori di H sono del tipo $(x, y, y - 2x, x + y)$. Una base di H è $\{(1.0, -2, 1), (0, 1, 1, 1)\}$.
K è generato da due vettori linearmente indipendenti , quindi $dim(K) = 2$.
La dimensione di $H + K$ è il rango della matrice che ha come righe i vettori che generano i due spazi. Si trova che $dim(H + K) = 4$, quindi per la formula di Grassman $dim(H \cap K) = 0$ e la somma è diretta.