GE110 - Geometria 1: Soluzioni Tutorato 5

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Lucia Carsetti
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

4 Aprile 2017

Esercizio .1 *Calcolare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 0 & 4 \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Soluzione: Calcoliamo il rango applicando operazioni elementari sulle righe. Il rango della matrice sarà il numero di righe non nulle.
La matrice A ha rango 2.
La matrice B ha rango 3.
la matrice C ha rango 3 se $k \neq 1, \pm 2$, altrimenti ha rango 2 .
La matrice D ha rango 2.
La matrice E ha rango 2.
La matrice F ha rango 4 se $k \neq 0$, altrimenti ha rango 3.

Esercizio .2 *Siano A e B due matrici quadrate reali di ordine n. Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni:*

(a) $rg(A+B) \leq min(rg(A), rg(B))$

(b) *se* $rg(A) = rg(B) = r \Rightarrow rg(AB) = r$ *con* $r \leq (n)$

Soluzione:

(a) Falso. Basta prendere $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ per vedere che $r(AB) = r(\mathbb{I}_2) = 2 > 1 = min\{r(A), r(B)\}$.

(b) Se $r = n$ è vero. In tal caso A e B sono invertibili e quindi $n = r(A) = r(AB)$ perché il rango di una matrice non cambia moltiplicandola per una matrice invertibile.
Se $r < n$ è falso. Prendendo come prima $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si ha $r(A) = r(B) = 1$, mentre $r(AB) = 0$.

Esercizio .3 *Dire, attraverso il calcolo del rango, se i seguenti sistemi ammettono soluzioni.*

Soluzione: Applichiamo il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli per stabilire la compatibilità o l'incompatibilità dei sistemi.
Denoteremo con A la matrice dei coefficienti del sistema, con b la colonna dei termini noti e con $A|b$ la matrice orlata.

- $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 6x - 2y + 6z = 2 \\ 7x + 7z = 3 \end{cases}$
  Poiché $r(A) = r(A|b) = 2$, il sistema è compatibile e ammette ∞^1 soluzioni.

- $\begin{cases} 2x + ky + 2z = 0 \\ kx + ky + 2kz = 0 \\ kx = 0 \end{cases}$
  Il sistema è omogeneo quindi ammette sicuramente soluzioni in quanto c'è almeno la soluzione banale.

- $\begin{cases} x + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases}$
  Poiché la prima e la terza riga della matrice A sono uguali abbiamo che $r(A) = 2$. Tuttavia $r(A|b) = 3$, quindi utilizzando K-R-C concludiamo che il sistema non è compatibile.

- $\begin{cases} x - 2y = k \\ 3x + ky + z = 0 \\ 2kx - ky + z = k \end{cases}$
  Se $k \neq 3$ si ha che $r(A) = r(A|b) = 3$ e quindi il sistema ammette un'unica soluzione.
  Se $k = 3$ si ha $r(A) = 2$, mentre $r(A|b) = 3$ quindi il sistema non è risolubile.

- $\begin{cases} x + z = -2 \\ 2x + y + t = -1 \\ -y - 2z - 2t = 2 \\ 3x - 3y + z + t = 1 \end{cases}$
  $r(A) = 4 = r(A|b)$ quindi il sistema è compatibile e ammette un'unica soluzione.

Esercizio .4 *Sia $A \in M_5(\mathbb{R})$. Sapendo che $rg(A^2) = 2$, qual è il valore massimo e minimo che può assumere $rg(A)$?*

Soluzione: $A \in M_5(\mathbb{R})$, quindi, in generale, $r(A) \leq 5$.
$2 = r(A^2) = r(A \cdot A) \leq min\{r(A), r(A)\} = r(A)$ da cui $r(A) \geq 2$. Tuttavia noto che non può essere $r(A) = 5$, perché altrimenti A sarebbe invertibile e dovrebbe essere $r(A^2) = 5$, contraddicendo le ipotesi.
Quindi $2 \leq r(A) < 5$.

Esercizio .5 *Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri* $A = \begin{pmatrix} 8 & k & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- *Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A è invertibile, e per tali valori si calcoli l'inversa con operazioni elementari*

- *Sia* $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\exists B \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $BA = C$.*

Soluzione: Affianchiamo la matrice identità alla matrice A e effettuiamo operazione sulle righe per trasformare la matrice A nell'identità, come abbiamo visto nel Tutorato 2.

- Si ottiene che la matrice A è invertibile per $k \neq -2, 4$, con inversa
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/(k^2-2k-8) & -2/(k^2-2k-8) & (k-2)/(k^2-2k-8) \\ k/(k^2-2k-8) & 2k/(k^2-2k-8) & -8/(k^2-2k-8) \\ -k/(k^2-2k-8) & (8-k^2)/(k^2-2k-8) & 8/(k^2-2k-8) \end{pmatrix}.$$

- Se $k \neq -2, 4$ allora A è invertibile e possiamo prendere $B = CA^{-1}$.
Se $k = -2, 4$ allora r(A)=2=r(C)e lo spazio generato dalle righe di BA è contenuto nello spazio generato dalle righe di A, i.e. è contenuto in $< (8, k, 2), (0, 1, 1) >$. Per avere $BA = C$ dobbiamo quindi avere che anche le righe di C sono contenute in quello spazio. Ma si vede direttamente che per esempio $(1, 0, 0) \notin < (8, k, 2), (0, 1, 1) >$. Quindi in questo caso non esiste la matrice B cercata.