GE110 - Geometria 1: Tutorato 6

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Lucia Carsetti
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

27 Aprile 2017

Esercizio 1 *Calcolare il determinante delle seguenti matrici (al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ quando presente):*

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
- $D = \begin{pmatrix} 6 & k & 1 \\ 1 & 2 & k-1 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- A^t
- $A \cdot B$

Soluzione:

- $det(A) = 1 - (-3) = 4.$
- $det(B) = 6 - 40 = -34.$
- $det(C) = 1\begin{vmatrix} \text{-2} & \text{-3} \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} \text{-1} & \text{-3} \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} \text{-1} & \text{-2} \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (-18+24) - 2(-9+21) + 3(-8+14) = 6 - 24 + 18 = 0$. Notiamo che si poteva dire subito che $det(C) = 0$ in quanto C non ha rango massimo: infatti la prima e la seconda riga sono multiple l'una dell'altra e il determinante di una matrice è non nullo se, e solo se, il rango è massimo.
- $det(D) = 6\begin{vmatrix} 2 & \text{k-1} \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} 1 & \text{k-1} \\ \text{k} & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \text{k} & 0 \end{vmatrix} = 6(4) - k(2-k^2+k) + (-2k) = k^3 - k^2 - 4k + 24.$
- $det(A^t) = det(A) = 4.$
- $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B) = 4(-34) = -136.$

Esercizio 2 *Calcolare, utilizzando la matrice dei cofattori, l'inversa delle seguenti matrici:*

- $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

- $C = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 \\ -1 & 0 & k-1 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$

Soluzione: Ricordiamo che l'inversa di una matrice A si calcola nel modo seguente:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(cof(A))^t.$$

Quindi si ha:

- $A^{-1} = -1/10 \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

- $B^{-1} = 2/105 \begin{pmatrix} -13/2 & 11 & -1/2 \\ -28 & 7 & 14 \\ 25/2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

- $det(C) = (k-1)(2+k^2-k)$ quindi C è invertibile $\Leftrightarrow k \neq 1$ e in questo caso $C^{-1} = 1/(k-1)(2+k^2-k) \begin{pmatrix} 0 & 2-2k & k^2-2k+1 \\ k^2-k+2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2-k & k-1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3 *Calcolare la soluzione dei seguenti sistemi, utilizzando il metodo di Cramer:*

- $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x+4y+2z=2 \\ 3x-y-z=3 \end{cases}$

- $\begin{cases} 2x+ky+2z=0 \\ kx+ky+2kz=0 \\ kx=0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$

- $\begin{cases} x+3y+2z-t=1 \\ 6x+2y+2t=2 \\ 6z+t=0 \\ 2x+2z+t=3 \end{cases}$

Soluzione: Indichiamo con A la matrice dei coefficienti e applichiamo la regola di Cramer.

- $det(A) = 30$ quindi la soluzione è data da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{-1}{5} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

- La soluzione è data da $x = 0$ $y = 0$ $z = 0$.

- $det(A) = 40$ quindi la soluzione del sistema è data da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{140}{40} = \frac{7}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{-140}{40} = \frac{-7}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{40}{40} = 1 \qquad t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{-240}{40} = -6$$

Esercizio 4 *Siano $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ e siano $M, N \in M_{2n}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici:*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$$

Dimostrare che $det(M) = det(A)det(C) = det(N)$.

Soluzione: Notiamo innanzitutto che le entrate delle matrici M e N sono anch'esse matrici, quindi non si può usare la formula per calcolare il determinante delle matrici due per due.
Se A non è invertibile, vuol dire che c'è un sottoinsieme di righe che non dipendente. Quindi anche N non è invertibile. Ragionando con le colonne si ottiene che se A non è invertibile anche M non lo è. Si ha pertanto $0 = det(M) = det(A)det(C) = det(n) = 0$.
Se A è invertibile consideriamo

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -BA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Usando lo sviluppo di Laplace per calcolare il determinante, si vede direttamente che $det(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -BA^{-1} & I_n \end{pmatrix}) = 1$, $det(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}) = det(A)$, $det(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}) = det(C)$. Quindi, ricordando che il determinante del prodotto è il prodotto dei determinanti, si ottiene $det(N) = det(A)det(C)$. Analogamente per M.

Esercizio 5 *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e sia l'applicazione*

$$\delta : V \times V \to V$$

$$(P, Q) \mapsto P - Q$$

Dimostrare che V è uno spazio affine su sè stesso. Se invece fosse $V = \mathbb{R}$ e

$$(P, Q) \mapsto P \cdot Q$$

V risulterebbe essere uno spazio affine su sè stesso?

Soluzione: Verifichiamo i due assiomi di uno spazio affine (in questo caso, su "se stesso" vuol dire $A = V$):
SA1) Per $P, v \in V$ dobbiamo avere un unico Q con $(P, Q) = v$. Ora, $(P, Q) = Q - P$ e l'unica soluzione di $Q - P = v$ è $Q = v + P$.
SA2) Presi $P, Q, R \in V$ abbiamo $(P, Q) + (Q, R) = Q - P + R - Q = R - P = (R, P)$.

Nel secondo caso A non è uno spazio affine su se stesso perché non è soddisfatto l'assioma SA2) infatti $(p, Q) + (QR) = PQ + QR \neq PR = (P, R)$ in generale.

Esercizio 6 *Sia* $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = x^2\right\}$ *. Si trovi un'applicazione*

$$\delta : A \times A \to \mathbb{R}$$

che renda A *uno spazio affine su* $\mathbb{R}$*.*

Soluzione: Si consideri $\delta((x, x^2), (y, y^2)) = y - x$. Facendo le stesse verifiche dell'esercizio precedente, si dimostra che δ è un'applicazione che rende A uno spazio affine su $\mathbb{R}$.

Esercizio 7 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione e sia* $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\right\}$ *. Esiste una funzione, come nell'esercizio precedente, che rende* A *uno spazio affine su* $\mathbb{R}$*?*

Soluzione: Basta porre $\delta((x.f(x)), (y, f(y))) = y - x$.