GE110 - Geometria 1: Tutorato 7

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Lucia Carsetti
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

2 Maggio 2017

Esercizio 1 *Stabilire se i seguenti punti $A, B, C \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono allineati e , in caso affermativo, trovare le equazioni cartesiane della retta che li contiene. Quando c'è un parametro, discuterlo.*

(a) $A = (1, 0),\ B = (2, 3),\ C = (3, 6)$

(b) $A = (5, 4),\ B = (4, 6),\ C = (2, 1)$

(c) $A = (2, 1),\ B = (3, k + 1),\ C = (2 + k, 2)$

Soluzione 1 *Affinchè A, B e C siano allineati deve essere* $\det \begin{pmatrix} \vec{AB} \\ \vec{BC} \end{pmatrix} = 0$. *Mentre per trovare la retta che li contiene, basta prendere due di questi punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ e imporre* $\det \begin{pmatrix} x - x_1 & y_{y1} \\ x - x_2 & y - y_2 \end{pmatrix} = 0$.

(a) I punti sono allineati e la retta che li contiene ha equazione $3x - y - 3 = 0$.

(b) I punti non sono allineati.

(c) I punti sono allineati per $k = \pm 1$. In particolare per $k = 1$ la retta che li contiene ha equazione $x - y - 1 = 0$, invece per $k = -1$ ha equazione $x + y - 3 = 0$

Esercizio 2 *Si stabilisca se le seguenti rette di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono parallele e coincidenti, parallele e distinte oppure incidenti; se sono incidenti calcolare il punto di intersezione:*

- $r : x + 2y - 1 = 0 \quad s : -x + y - 2 = 0$
- $r : 3x - 2y + 1 = 0 \quad s = \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 4 + 6t \end{cases}$
- $r = \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \end{cases} \quad s = \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = \frac{8}{3} + 2t \end{cases}$

Soluzione 2

- *Per vedere se sono parallele calcoliamo il determinante dei coefficienti: det* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$ *quindi non sono parallele. Il punto di intersezione è $(-1, 1)$.*
- *Scriviamo l'equazione di r in forma parametrica: ponendo $y = t$ si ottiene $x = \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}$. Quindi la giacitura di r è data da $(\frac{2}{3}, 1) = \frac{1}{6}(4, 6)$ dove $(4, 6)$ genera la giacitura di s quindi r e s sono parallele. Inoltre poichè s contiene il punto $(2, 4)$ a differenza di r, esse non sono coincidenti.*

- *Facendo lo stesso discorso di prima sulla giacitura di vede che le due rette sono parallele e poichè entrambe contengono il punto* $(0,2)$*, esse sono coincidenti.*

Esercizio 3 *Determinare l'equazione parametrica delle rette di* $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ *parallele al vettore* v *dato e passanti per il punto* $r \cap s$ *in ciascuno dei seguenti casi:*

- $v = (2,4)$ $\;r : 3x - 2y - 7 = 0, \;\; s : 2x + 3y = 0$
- $v = (-5\sqrt{2}, 7)$ $\;r : x - y = 0, \;\; s : x + y = 1$

Soluzione 3
- $(\frac{21}{13}, -\frac{14}{13}) + t(2,4)$
- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + t(-5\sqrt{2}, 7)$

Esercizio 4 *Si scriva l'equazione del piano* π *in* $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ *soddisfacente alle seguenti proprietà:*

(a) passante per $A(1,1,0)$ *e parallelo ai vettori* $u = (1,0,1)$ *e* $v = (0,2,3)$*;*

(b) passante per $B(0,1,1)$ *e* $C(3,2,1)$ *e parallelo a* $w = (0,0,5)$*;*

(c) passante per il punto $D(1,-1,-2)$ *e parallelo alle rette*
$$r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 5 = 0 \end{cases} \quad e \; s : \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Soluzione 4
- *2x+3y-2z=5*
- *x-3y=-3*
- *Si scrivono le equazioni di* r *e* s *in forma parametrica e si ottiene:* $r : (1,0,4) + t(1,1,-1)$*,* $s : (1,0,2) + t(0,1,0)$*. Quindi le equazioni parametriche del piano sono date da*
$$\pi : (1,-1,-2) + \alpha(1,1,-1) + \beta(0,1,0),$$
da cui si può passare alla forma cartesiana $x + z + 1 = 0$*.*

Esercizio 5 *In* $\mathbb{A}^3$ *si scriva l'equazione del piano* α *passante per i punti* $A(1,0,0)$*,* $B(2,1,1)$ *e* $C(0,1,1)$ *e l'equazione del piano* β *contenente le rette:*
$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 11 = 0 \end{cases} \qquad e \quad s : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ \frac{1}{4}y - z = -2 \end{cases}$$
Infine si determini se i due piani sono paralleli o incidenti.

Soluzione 5
- *La giacitura è data dai vettori* $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ *e* $\overrightarrow{AD} = (-1,1,1)$ *quindi le equazioni parametriche di* α *saranno date da*
$$\alpha : \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = t + s \\ z = t + s \end{cases}$$
Inoltre $y = z$ *risulta essere l'equazione cartesiana di* α*.*

- *Per trovare la giacitura di r basta risolvere il sistema omogeneo dato dalle equazioni cartesiane di r e si ottiene $giac(r) = (0, 1, 0)$. Allo stesso modo si ottiene $giac(s) = (1, 4, 1)$. Il piano β ha equazioni parametriche*

$$\beta : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 4s \\ z = 1 + t + s \end{cases}$$

da cui si ricava l'equazione cartesiana $x = z$.

I piani sono incidenti.

Esercizio 6 *Sia $\mathbb{A}^2$ il 2-spazio affine numerico e sia Oe_1, e_2 il sistema di riferimento standard:*

(a) si trovino le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per $P(1, 2)$ e parallela al vettore $v = (1, -1/2)$;

(b) si consideri la retta s passante per i punti $Q(0, -3/2)$ e $R(-1, 2)$, si trovino le equazioni parametriche e cartesiane;

(c) r e s sono sghembe? Sono parallele? sono incidenti?

(d) si trovino gli eventuali punti in comune;

(e) si determini l'equazione della retta t del fascio proprio con centro il punto $C(\frac{-4}{3}, \frac{19}{6})$passante per $O(0, 0)$;

(f) si scriva l'equazione del fascio improprio di rette parallele a t.

Soluzione 6 *(a)* $x + 2y - 5 = 0$ *e* $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{5}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$

(b) $7x + 2z + 3 = 0$ *e* $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2}t \end{cases}$

(c) Due rette nel piano non possono essere mai sghembe, inoltre non sono parallele perchè non hanno la stessa giacitura quindi sono incidenti.

(d) Il punto in comune è $P = (-\frac{4}{3}, \frac{19}{6})$.

(e) 19x+8y=0

(f) 19x+8y+t=0

Esercizio 7 *Sia A uno spazio affine di dimensione 4 e sia Oe_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine.*

- *Calcolare le equazioni cartesiane del sottospazio affine S passante per $Q(0, 1, 0, -1)$ e avente per giacitura il sottospazio generato dai vettori $v = 6e_1 + 2e_2 + 2e_3 + e_4$ e $w = e_2$.*

- *Sia T il sottospazio affine di equazioni* $\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$ *. S è parallelo a T?*

Soluzione 7 • *Osserviamo che stiamo considerando un sottospazio di dimensione 2 in uno spazio di dimensione 4, quindi la forma cartesiana è costituita da due equazioni. Scriviamo prima la forma parametrica:*

$$S : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, -1) + t_1(6, 2, 2, 1) + t_2(0, 1, 0, 0)$$

Scegliamo tre punti non allineati e contenuti in S come ad esempio $(0,1,0,-1),(0,2,0,-1)$ e $(6,3,2,0)$ (in quanto un piano è univocamente determinato dalla scelta di 3 punti). Le due equazioni cartesiane del piano saranno della forma $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5=0$ dove possiamo supporre che $a_5=1$ in quanto S non contiene $(0,0,0,0)$. Se inseriamo i 3 punti nell'equazione otteniamo un sistema lineare di 3 equazioni in 4 variabili che ha soluzioni della forma $(t,0,-3t-\frac{1}{2},1)$. Scegliendo ad esempio $t=0$ e $t=-\frac{1}{6}$ si ottiene l'equazione cartesiana:

$$\begin{cases} -12x_3+x_4+1=0 \\ -\frac{1}{6}x_1+x_4+1=0 \end{cases}$$

- *L'equazione parametrica di T è data da $(0,2,0,0=+t_1(0,2,2,0)+t_2(2,2,0,2)$, pertanto si vede che la giac$(T)=<(0,2,2,0),(2,2,0,2)>\neq<(6,2,2,1),(0,1,0,0)>$ in quanto ad esempio non esistono α,β tali che $(6,2,2,1)=\alpha(0,2,2,0)+\beta(2,2,0,2)$.*

Esercizio 8 *Si determinino esplicitamente, a variare del parametro k, tutte le soluzioni dei seguenti sistemi lineari, utilizzando in caso di soluzione unica il metodo di Cramer:*

$$\begin{cases} 2y+kz=1 \\ ky+2y=2 \\ y+kz=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} kx+z=k \\ ky+3z=k \\ 2x+ky+z=k \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+ky+2z=1 \\ 5x+ky+kz=0 \\ x+kz=1 \end{cases}$$

Soluzione 8 *(a) Se $k\neq 0$ allora $\exists!$ soluzione del tipo $(\frac{6}{k},-2,\frac{5}{k})$. Se $k=0$ allora il sistema è incompatibile.*

(b) Se $k\neq 0,-1$ allora $\exists!$ soluzione del tipo $(\frac{k}{k+1},\frac{k-2}{k+1},\frac{k}{k+1})$. Se $k=0$ allora il sistema è risolubile e ha ∞^1 soluzioni del tipo $(0,t,0)$. Se $k=-1$ allora il sistema è incompatibile.

(c) Se $k\neq 0,2$ allora $\exists!$ soluzione del tipo $(-\frac{k+4}{2k-4},\frac{5k+2}{k(2k-4)},\frac{3}{2k-4})$. Se $k=0,2$ allora il sistema è incompatibile.

(d) Se $k\neq\frac{1}{3}$ allora $\exists!$ soluzione del tipo $(-\frac{k(2k+1)}{3k-1},-\frac{1}{2},\frac{2k}{3k-1},\frac{2k-1}{3k-1})$. Se $k=\frac{1}{3}$ allora il sistema è incompatibile.