GE110 - Geometria 1: Tutorato 8

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Lucia Carsetti
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

9 Maggio 2017

Esercizio 1 *Si consideri lo spazio affine reale* $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

(a) *Sia* r *la retta di equazioni cartesiane* $r: \begin{cases} x+2z+1=0 \\ 2x+y+3z+1=0 \end{cases}$
Determinare le equazioni parametriche di r.

(b) *Sia* s *la retta di equazioni cartesiane* $s: \begin{cases} x+1=0 \\ 2x+3y+1=0 \end{cases}$
Dire se r *ed* s *sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso siano incidenti trovare il punto di intersezione.*

(c) *Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta* t *complanare con le rette* r *ed* s *e passante per il punto* $P(1,0,1)$.

(d) *Determinare le equazioni cartesiane e parametriche della retta* q *passante per il punto* $Q(1,0,0)$ *e parallela al vettore* $v=(1,-1,4)$.

(e) *Dire se* t *e* q *sono parallele, sghembe o incidenti ed eventualmente trovare il punto di intersezione.*

Soluzioni 1 (a) *Le equazioni parametriche della retta* r *sono date da:* $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$

(b) *Consideriamo la matrice le cui righe sono date dai coefficienti dei piani che individuano le due rette. Allora le due rette sono complanari (incidenti o parallele) se e solo se* $detA=0$. *Da un calcolo diretto si vede che* $detA=-4$ *quindi le rette* r *e* s *sono sghembe.*

(c) *Innanzitutto notiamo che esiste un unico piano* π *che contiene* r *e passante per il punto* P *così come esiste un unico piano* π' *che contiene* s *e passante per* P. *Inoltre* $\pi \neq \pi'$ *altrimenti le due rette sarebbero complanari. Quindi* $\pi \cap \pi' = t$. *Per trovare l'equazione di entrambi i piani basta scrivere il fascio di piani di asse la retta* r *e la retta* s *e poi imporre il passaggio per il punto* P. *Fatto questo si avranno due equazioni (una per* π *e una per* π'*) in* λ *e* μ *e fissando uno dei due parametri si ottengono le equazioni dei piani cercati.*
In particolare $t: \begin{cases} x+2y-1=0 \\ x+6y-1=0 \end{cases}$.

(d) *Le equazioni parametriche di q sono date da:* $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases}$ *quindi per ottenere le equazioni cartesiane basta annullare 2 qualsiasi minori della matrice* $\begin{pmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. *Ad esempio* $q : \begin{cases} -x - y + 1 = 0 \\ 4y + z = 0 \end{cases}$.

(e) *Si scrive la matrice B che ha per righe i coefficienti dei piani che determinano t e q. Si vede che* $det(B) = 0$ *quindi le rette sono complanari e, siccome* $rg(B) = 3$, *sono incidenti con punto di intersezione* $(1, 0, 0)$.

Esercizio 2 *Rappresentare con equazioni parametriche e cartesiane le seguenti rette:*

- *passante per* $A(1, 2, 1)$ *e parallela alla retta* $s : x - 1 = 2y + 3 = 1 - z$;
- *passante per* $B(1, 2, 1)$ *e parallela ai piani* $E : x + y - 1 = 0$ *e* $F : 2y + 3 = 0$.

Soluzioni 2

Equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. *Equazioni cartesiane:* $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$.

Equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 + t \end{cases}$. *Equazioni cartesiane:* $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$.

Esercizio 3 *Determinare la mutua posizione delle seguenti coppie di sottospazi affini:*

- $\pi : x + 3y + z = 2 \quad r : \begin{cases} x + z = 3 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$
- $\pi : x + 3y + z = 2 \quad r : \{(2 + 3t, 1 + 5t, 4), t \in \mathbb{R}\}$
- $r : \{(2 + 3t, 1 + 5t, t), t \in \mathbb{R}\} \quad r : \{(5 + 3h, 6 + 5h, 1 + h), h \in \mathbb{R}\}$
- $r : \{(2 + 3t, 1 + 5t, 3t), t \in \mathbb{R}\} \quad r : \{(5 + h, 2 - h, -1 + 3h), h \in \mathbb{R}\}$
- $\pi : \{(2 + 4h + k, 1 + 6h + k, 3h), h, k \in \mathbb{R}\} \quad r : \{(2 + 3t, 3t, 4), t \in \mathbb{R}\}$

Soluzioni 3 *La retta e il piano sono incidenti*

- *La retta e il piano sono paralleli e coincidenti*
- *La retta e il piano sono paralleli e distinti*
- *La retta e il piano sono paralleli e distinti*

Esercizio 4 *In* $\mathbb{A}^3$ *sia fissata la retta* $r : \begin{cases} 2x - y + 3z + 5 = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases}$
Determinare la retta s parallela ad r e passante per $Q(1, 0, 1)$.

Soluzioni 4 *La retta cercata ha equazioni* $\begin{cases} 2x - y + 3z + 5 = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases}$.

Per vedere se può esistere una siffatta applicazione lineare cerchiamo una base di $\ker(f)$: risolvendo il sistema lineare che definisce il nucleo si vede che esso ha ∞^2 soluzioni date da $(-2s, s, 0, t)$ quindi $dim \ker(f) = 2$. Pertanto per il teorema della nullità e del rango si vede che $dimIm(f) = dim\mathbb{R}^4 - dim \ker(f) = 4 - 2 = 2 \neq 3 = dim\mathbb{R}^3$ quindi una tale f non può mai essere suriettiva.

Esercizio 5 *Esiste un' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ suriettiva tale che $ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = 2z = 0\}$?*

Soluzioni 5 *Per vedere se può esistere una siffatta applicazione lineare cerchiamo una base di $\ker(f)$: risolvendo il sistema lineare che definisce il nucleo si vede che esso ha ∞^2 soluzioni date da $(-2s, s, 0, t)$ quindi $dim \ker(f) = 2$. Pertanto per il teorema della nullità e del rango si vede che $dimIm(f) = dim\mathbb{R}^4 - dim \ker(f) = 4 - 2 = 2 \neq 3 = dim\mathbb{R}^3$ quindi una tale f non può mai essere suriettiva.*

Esercizio 6 *Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da $f(x, y, z) := (2x + 2y, x + z, x + 3y - 2z)$.*

- *Dire se f è suriettivo. In caso negativo, determinare un vettore v t.c. $f^{-1}(v) = \emptyset$.*
- *Dire se f è iniettivo. In caso negativo, determinare due vettore $a, b \in \mathbb{R}^3$, $a \neq b$, ma con $f(a) = f(b)$.*
- *Sia $U =< u, w >$ dove $u = (1, 0, 1)$ e $w = (0, 1, 1)$. Dire se il vettore $x = (4, 3, -2) \in f(E)$.*

Soluzioni 6 • *Per vedere se f è suriettivo bisogna determinare $Im(f)$. In generale noi sappiamo che $Im(f) =< f(e_1), f(e_2), f(e_3) >$ dove i vettori e_1, e_2, e_3 costituiscono una base fissata. Nel nostro caso, scegliendo come base quella canonica di $\mathbb{R}^3$ notiamo che $dimIm(f) = 2 \neq 3 = dim\mathbb{R}^3$ quindi f non è suriettivo. Per scrivere un vettore che non sta nell'immagine basta prendere un vettore che non è combinazione lineare dei vettori della base di $Im(f)$ come ad esempio $v = (0, 1, 0)$.*

- *Per il teorema della nullità più rango di vede subito che f non è iniettivo in quanto $dim \ker(f) = dim\mathbb{R}^3 - dimIm(f) = 1$. Per trovare i vettori cercati, scriviamo innanzitutto un vettore che sta nel nucleo risolvendo il sistema:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per esempio sia $v = (1, -1, -1) \in \ker(f)$ quindi si ha che $f(w) = f(v + w)$ e $w \neq v + w$ per ogni $w \notin ker(f)$.

Esercizio 7 *Verificare che le seguenti applicazioni sono lineari e determinarne nucleo e immagine:*

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definita come* $(x, y, z) \longrightarrow (2z - x, x + y, x + 2y + 2z)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *definita come* $(x, y) \longrightarrow (x - 2y, 2x + y, 5y, 3x - y)$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definita come* $(x, y, z) \longrightarrow (x + y - z, x - y + z)$

Soluzioni 7 *(a)* $\ker(f) = \left\{(t, -t, \frac{t}{2}) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ *e* $Im(f) =< (0, 1, 2), (2, 0, 2) >$

(b) $\ker(f) = (0, 0)$ *e* $Im(f) =< (1, 2, 0, 3), (-2, 1, 5, -1) >$

(c) $\ker(f) = \{(0, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *e* $Im(f) = \mathbb{R}^2$