# GE110 - Geometria 1: Soluzioni Tutorato 9

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Lucia Carsetti
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

16 Maggio 2017

**Esercizio 1** *Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito dalla matrice (rispetto alla base canonica)* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Calcolare la dimensione di* $\ker(f)$ *e* $Im(f)$.

**Soluzione:** La dimensione dell'immagine è uguale al rango della matrice. In questo caso si trova che $dim(Im(f)) = 4$. Per il teorema di rango+nullità si ha che
$dim(Ker(f)) = dim(\mathbb{R}^4) - dim(Im(f)) = 4 - 4 = 0$.

**Esercizio 2** *Stabilire se le seguenti applicazioni lineari sono iniettive e/o suriettive:*

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $f(x, y) = (x - y, 2x - \frac{1}{3}y, 2x + y)$
- $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tale che* $g(x, y, z) = (-x + z, \frac{x}{2} + y - 3z)$

**Soluzione:** Le equazioni che definiscono $f$ sono linearmente indipendenti, quindi la matrice corrispondente ha rango $2 \Rightarrow dim(Im(f)) = 2$. Poiché $dim(Im(f)) = 2 < dim(\mathbb{R}^3)$ , $f$ non è suriettiva. Invece $f$ è iniettiva in quanto $dim(ker(f)) = 0$.
$g$ non può essere iniettiva perché la dimensione del dominio è più grande rispetto a quella del codominio. E' suriettiva perché le due equazioni sono indipendenti.

**Esercizio 3** *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *l'applicazione lineare definita rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^2$ *nel modo seguente:*

$$f(e_1) = (1, 2, 1) \quad f(e_2) = (4, 0, 1)$$

- *Esplicitare* $f(x, y)$
- *Stabilire se i vettori* $(3, 4, 1), (3, -2, 0)$ *appartengono a* $Im(f)$.

**Soluzione:** La matrice associata all'applicazione $f$ è: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Quindi $f(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4y \\ 2x \\ x + y \end{pmatrix}$.

$(3, 4, 1) \notin Im(f) =< (1, 2, 1), (4, 0, 1) >$ in quanto $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

$(3, -2, 0) \in Im(f) =< (1, 2, 1), (4, 0, 1) >$ in quanto $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

**Esercizio 4** *Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da $T(x,y,z) = (2x+z, -2x+y+z, y+2z)$.*

- *Determinare una base di $\ker(T)$ e $Im(T)$ e dedurre se $T$ è iniettivo e/o suriettivo.*
- *Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $T(v) = (3,3,k)$.*

**Soluzione:**

- Considero la matrice associata a $T$ : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
  $dim(Im(T)) = rango(A) = 2$ quindi $T$ non è suriettiva. Una base dell' immagine è data da $T(e_1) = (2,-2,0)$ e $T(e_2) = (0,1,1)$.
  $T$ non è iniettiva, essendo $dim(ker(T)) = 1$, e una base di $Ker(T)$ è un vettore soluzione del sistema lineare omogeneo dato dalle tre equazioni che definiscono $T$. Possiamo scegliere, ad esempio, $(1,4,-2)$.

- $(3,3,k) \in Im(T) =< (2,-2,0),(0,1,1) > \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & \text{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & \text{k} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k = 6.$
  Per trovare tutti i vettori $v$ tali che $T(v) = (3,3,6)$ si risolve il sistema lineare associato e si trova che la fibra di $(3,3,6)$ è data dai vettori della forma $(t, 4t, 3-2t)$.

**Esercizio 5** *Siano $\mathcal{B} = \{(1,1,-1),(1,-1,-1),(-1,-1,-1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,0,1,-1),(-1,1,1,0),(0,0,1,-1),(1,0,-1,-1)\}$ due basi rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ e siano le seguenti applicazioni lineari:*

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $f(x,y,z) = (x+z, x+2y, 2x+3y+z)$
- $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *tale che* $g(x,y,z) = (x+z, x+y+z, x-y+2z, 2x+y+2z)$
- $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $h(x,y,z,t) = (x+2z+t, x-y-z+t, y-t)$
- $k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *tale che* $k(x,y,z,t) = (x+z+t, 2x+y+t, x-y-2z+t, y-z+t)$

*Determinare le matrici $M_{\mathcal{B}}(f)$,$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)$,$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(h)$ e $M_{\mathcal{B}'}(k)$.*

**Soluzione:** Usiamo il fatto che per $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ abbiamo $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(T) = (M_{e,\mathcal{B}'}(Id_n))^{-1} M_{e,e}(T) M_{e,\mathcal{B}}(Id_m)$, dove $M_{e,e}(T)$ denota la matrice associata a $T$ rispetto alla base canonica in $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$.
Otteniamo quindi:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 6** *Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalla matrice (rispetto alla base canonica)* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$ *con $h \in \mathbb{R}$. Dopo aver trovato il valore di $h$ per cui $f$ non è suriettivo:*

- *Determinare $Im(f)$*
- *Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (1, k^2 - k, k) \in Im(f)$*
- *Trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ privo di controimmagini mediante $f$*
- *Determinare* $\ker(f)$
- *Verificare che* $\ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$
- *Esistono dei vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = (3, 2, -2)$?E tali che $f(v) = (1, 2, -1)$?*

**Soluzione:** $f$ non è suriettivo se e solo se il rango di $A$ non è massimo, cioè se e solo se $detA = 0 \Leftrightarrow h = 2$.

- $Im(f) =< (2, 1, -1), (1, 2, 1) >$.
- $(1, k^2 - k, k) \in Im(f)$ se può essere scritto come combinazione lineare dei vettori che ne costituiscono la base, ossia se $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \mathrm{k}^2 - k \\ -1 & 1 & \mathrm{k} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k = 1 \pm \sqrt{2}$.
- Un vettore privo di controimmagini è un vettore che non appartiene a $Im(f)$. Basta scegliere un vettore linearmente indipendente con quelli che formano la base di $Im(f)$, ad esempio $v = (1, 0, 1)$.
- Per il teorema di rango + nullità $dim(Ker(f)) = 1$. Per trovare un vettore che genera il nucleo basta risolvere il sistema omogeneo $Ax = 0$ che ha soluzioni $(t, -t, t)$ $\Rightarrow Ker(f) =< (1, -1, 1) >$.
- I vettori della base del nucleo e i vettori della base dell' immagine sono linearmente indipendenti tra loro, quindi per la formula di Grassmann vettoriale si ha $dim(Ker(f)) + dim(Im(f) = dim(ker(f) \cap Im(f)) + dim(Ker(f) + Im(f))$, da cui $dim(ker(f) \cap Im(f)) = 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow ker(f) \cap Im(f) = \{(0, 0, 0)\}$.
- $(3, 2, -2) \in Im(f) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. In questo caso il determinante è diverso da zero e quindi concludo che $(3, 2, -2) \notin Im(f)$. Analogamente, si vede che $(1, 2, -1) \notin Im(f)$ quindi anche in questo caso non esistono vettori $v$ tali che $f(v) = (1, 2, -1)$.