GE110 - Geometria 1: Tutorato 10

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Lucia Carsetti
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

23 Maggio 2017

Esercizio 1 *Siano A e B due matrici simili. Si dimostri che:*

- $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$;
- $tr(A) = tr(B)$;
- A^n *e* B^n *sono simili.*

Esercizio 2 *Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quali di queste matrici sono diagonalizzabili?

Esercizio 3 *Si consideri la matrice simmetrica* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- *Dire se A è invertibile e, in caso affermativo, determinare A^{-1};*
- *Calcolare gli autovalori e gli autospazi di A;*
- *Determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP = D$, dove D è diagonale.*

Esercizio 4 *Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ associato alla matrice* $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- *Determinare gli autovalori di f e le relative molteplicità.*
- *Determinare gli autospazi di f e trovare, se esiste, una base B di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.*
- *Calcolare una matrice P invertibile tale che $P^{-1}M(f)P$ sia diagonale.*

Esercizio 5 *Siano $k \in \mathbb{R}$, $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che*

$$v_1 \in N(F),\ v_2 \in N(F),\ F(e_2) = e_2 + ke_4,\ F(e_4) = e_2 + v_1$$

dove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

- *Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.*
- *Trovare la dimensione degli autospazi di F.*
- *Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.*

Esercizio 6 *Stabilire se le seguenti applicazioni da $M_3(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ sono lineari e, in caso affermativo, dire se sono suriettive e trovare il nucleo.*

- *L'applicazione determinante $Det : A \longrightarrow Det(A)$.*
- *L'applicazione traccia $Tr : A \longrightarrow Tr(A)$.*

Esercizio 7 *Data la matrice* $A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, *con $a \in \mathbb{R}$*

- *Determinare per quali valori del parametro a la matrice A ammette autovalore $\lambda = 1$.*
- *Posto $a = 0$, esistono tre autovettori di A linearmente indipendenti?*

Esercizio 8 *Sia a un numero reale, sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base $\{e_1, e_2, e_3\}$ e siano $v = e_2 - e_3$, $w = (a-5)e_1 + \frac{7}{4}e_2 + 4e_3$.*
Sia $F : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare tale che

$$F(e_1 + v) = w,\ F(e_1) = ae_1 + 2e_3,\ F(e_2 + e_3) = e_1 + \frac{1}{4}e_2$$

(a) Determinare una matrice di F;

(b) Trovare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, basi per gli autospazi di F;

(c) Determinare i valori di a per cui F è digonalizzabile.