

Tutorato di GE110

A.A. 2016-2017 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez

Tutori: Lucia Carsetti e Gaudenzio Falcone

TUTOTATO 1
7 MARZO 2017

1. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcolare dove possibile :

- $A^t, C^t, AC, A^t C, A^t C^t, C^t A^t$;
- $ACD, 3(AC + B)D^2$

2. Trovare due matrici di ordine 3 il cui prodotto sia la matrice nulla.
3. Siano A e B due matrici quadrate di uguale dimensione. E' vero che:

- (a) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$;
- (b) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Altrimenti qual è l'ipotesi da richiedere?

4. Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Si trovi per quali valori del parametro k la matrice A è simmetrica e B antisimmetrica.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & k^4 - 3k + 1 & 2 \\ k^4 + 2k - 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} k^3 + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k & -2 & k^3 + 4k^2 + k - 8 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & k^3 - 5k^2 + 4k & 0 \end{pmatrix}$$

6. Una matrice quadrata A si dice nilpotente se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $A^k = 0$. Mostrare che

$$\text{la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ è nilpotente di ordine 3 (i.e. } A^3 = 0\text{).}$$

Dimostrare che $A \in M_n(K)$ nilpotente non è invertibile.

7. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B una matrice tale che $AB = BA$.

Si dimostri che $B = \lambda \mathbb{I}_2 + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda, x \in \mathbb{R}$.

8. Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_2(\mathbb{R})$)

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto alla somma e al prodotto di matrici.

9. Si mostri che l'inversa di una matrice simmetrica e invertibile è ancora una matrice simmetrica.

10. Dimostrare che una matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

è invertibile se e solo se $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, ed in tal caso la sua inversa è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$