GE110 - Geometria 1: Tutorato 3

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Lucia Carsetti
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

21 Marzo 2017

Esercizio .1 *Si considerino i seguenti insiemi di matrici quadrate di ordine n (reali o complesse):*

(a) *Matrici antisimmetriche;*

(b) *Matrici triangolari superiori;*

(c) *Matrici invertibili;*

(d) *Matrici con elemento (1; 1) uguale a 0;*

(e) *Matrici con elemento (1; 1) uguale a 1 (matrice nulla compresa).*

Si dica quali dei precedenti sono sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale M_n delle matrici quadrate di ordine n.

Esercizio .2 *Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali e, in caso affermativo, trovarne una base.*

(a) $\{(x, 0, 0) \,|x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$;

(b) $\{(x, y, z) \,|x - 7y + z = 1\}$;

(c) $\{(t, t, t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$;

(d) $\mathbb{R}^3 - (0, 0, 1)$;

(e) $H1 \cup H2 \cup H3 : Hi = \{(x_1, x_2, x_3) : xi = 0\}$;

(f) $\{(x, y, z) \mid x + y - 5z = 0 \; 2(x + y) = 0\}$;

(g) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$;

(h) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Esercizio .3 *Si stabilisca se i seguenti insiemi di vettori generano tutto $\mathbb{R}^3$, se sono linearmente dipendenti o indipendenti e se ne costituiscono una base. Nel caso siano dipendenti, si scriva uno di questi come combinazione lineare degli altri. Se possibile, si trovi una combinazione lineare che dia come risultato* $(1, 1, 1)$.

- $v_1 = (1, 3, 2)$, $v_2 = (2, 1, -1)$, $v_3 = (1, 2, -2)$
- $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 0, 6)$, $v_3 = (2, 3, 0)$
- $v_1 = (4, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 1)$, $v_3 = (4, 0, 5)$, $v_4 = (1, 1, 0)$
- $v_1 = (3, -5, 2)$, $v_2 = (1, 3, -1)$

Esercizio .4 *In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si verifichi che l'insieme $K = \{A, B, C, D\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$ e si esprima la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ nella base di K.

Esercizio .5 *Dati i seguenti vettori:*
$a = (1, 3, 2)$; $b = (-2, k-6, k+4)$; $c = (-1, k-3, k^2+k+1)$; $d = (0, -2, k-1)$ determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R} : a, b, c$ sono linearmente indipendenti.
Posto $k = 2$ determinare le componenti del vettore d rispetto alla base a, b, c.

Esercizio .6 *Dimostrare che:*
$\mathbb{R}^4 = U \bigoplus W$ *con* $U =< (1, 0, \sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0, -1, 0) >$ *e* $W =< (0, -2, 0, 3), (0, 1, 0, 1) >$.

Esercizio .7 *Siano W_1 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $a = (1, 1, -1)$, $b = (2, -1, 1)$ e W_2 il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $c = (1, 2, -2)$, $d = (-1, -1, 2)$. Trovare $W_1 \cap W_2$ e una sua base.*

Esercizio .8 *In $\mathbb{R}^5$ si consideri l'insieme:*
$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 2x_1 + x_2 = x_3 = 0\}$.

- *Si verifichi che W_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$, se nedetermini una base e la dimensione.*
- *Sia $W_2 =< a, b, c, d >$, dove $a = (0, 3, 1, -2, 0)$, $b = (0, 0, 2, 1, 1)$, $c = (0, 6, -10, -10, -6)$, $d = (0, 3, 7, 1, 3)$. Se ne determini una base e la dimensione.*
- *Si provi che $W_1 \bigoplus W_2 = \mathbb{R}^5$.*
- *Si determini un sottospazio W_3 di $\mathbb{R}^5$ t.c. $dim(W_1 \cap W_3) = 1$ e $dim(W_3) = 3$.*