GE110 - Geometria 1: Tutorato 4

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Lucia Carsetti
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

28 Marzo 2017

Esercizio .1 *Siano U e V sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$.*

- *Provare che $U \cap V \neq \emptyset$*
- *Determinare tutte le possibili intersezioni di $U \cap V$ e costruire un esempio per ciascuna di esse.*

Esercizio .2 *Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazi vettoriali:*

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y = 2t = 0\}$$

$$K =< (1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5) >$$

- *Determinare la dimensione e una base per H e K*
- *Determinare la dimensione e una base per $H \cap K$ e $H + K$*
- *Il vettore $v = (1, 2, 3, 4)$ appartiene a $H + K$? In caso affermativo scrivere v come somma di un vettore di H e di un vettore di K.*

Esercizio .3 *Calcolare il rango delle seguenti matrici:*

- $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio .4 *Si determinino le componenti dei vettori $v_1 = (3, 2, -5), v_2 = (1, 0, -\frac{1}{2}), v_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ rispetto alle seguenti basi:*

- *La base canonica di $\mathbb{R}^3$*
- *La base $\{(1, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 2, 1)\}$.*

Esercizio .5 *Dire quali tra i seguenti insiemi di vettori risultano essere una base di $\mathbb{R}$; si completino a base di $\mathbb{R}^4$ gli insiemi di vettori che non sono una base.*

- $\{(1,0,8,9),(2,3,4,0),(2,0,1,2),(1,7,5,9)\}$
- $\{(1,0,0,1),(2,3,3,2),(0,-1,-1,0)\}$
- $\{(h,0,1,0),(1,3,2,0),(1,0,h,0),(1,3h,2h,0)\}$ *al variare di* $h \in R$.

Esercizio .6 *In* $\mathbb{R}^4$ *consideriamo i vettori*

$$a = (1,1,1,0), b = (0,1,1,1), c = (1,1,0,0).$$

- *Verificare che* a, b, c *sono linearmente indipendenti*
- *Completare* $\{a, b, c\}$ *a base di* $\mathbb{R}^4$
- *Dire se il sottospazio* $H = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = z + t = 0\right\}$ *è contenuto in* $K =< a, b, c >$.

Esercizio .7 *Si considerino in* $\mathbb{R}^4$ *i sottospazi:*

$$H = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z = x + y - t = 0\right\}$$

$$K =< (0,0,1,1),(1,1,0,0) >$$

Determinare la dimensione e una base di $H + K$. *Tale somma è diretta?*