GE110 - Geometria 1: Tutorato 9

Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Gaudenzio Falcone, Lucia Carsetti
Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica

16 Maggio 2017

Esercizio 1 *Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito dalla matrice (rispetto alla base canonica)* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Calcolare la dimensione di* $\ker(f)$ *e* $Im(f)$.

Esercizio 2 *Stabilire se le seguenti applicazioni lineari sono iniettive e/o suriettive:*

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $f(x, y) = (x - y, 2x - \frac{1}{3}y, 2x + y)$
- $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tale che* $g(x, y, z) = (-x + z, \frac{x}{2} + y - 3z)$

Esercizio 3 *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ nel modo seguente:*

$$f(e_1) = (1, 2, 1) \quad f(e_2) = (4, 0, 1)$$

- *Esplicitare* $f(x, y)$
- *Stabilire se i vettori* $(3, 4, 1), (3, -2, 0)$ *appartengono a* $Im(f)$.

Esercizio 4 *Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da* $T(x, y, z) = (2x + z, -2x + y + z, y + 2z)$.

- *Determinare una base di* $\ker(T)$ *e* $Im(T)$ *e dedurre se T è iniettivo e/o suriettivo.*
- *Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che* $T(v) = (3, 3, k)$.

Esercizio 5 *Siano* $\mathcal{B} = \{(1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, -1, -1)\}$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1, -1), (-1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, -1), (1, 0, -1, -1)\}$ *due basi rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ e siano le seguenti applicazioni lineari:*

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $f(x, y, z) = (x + z, x + 2y, 2x + 3y + z)$
- $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *tale che* $g(x, y, z) = (x + z, x + y + z, x - y + 2z, 2x + y + 2z)$
- $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $h(x, y, z, t) = (x + 2z + t, x - y - z + t, y - t)$
- $k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *tale che* $k(x, y, z, t) = (x + z + t, 2x + y + t, x - y - 2z + t, y - z + t)$

Determinare le matrici $M_{\mathcal{B}}(f)$,$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)$,$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(h)$ *e* $M_{\mathcal{B}'}(k)$.

Esercizio 6 *Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalla matrice (rispetto alla base canonica)* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$ *con $h \in \mathbb{R}$. Dopo aver trovato il valore di h per cui f non è suriettivo:*

- *Determinare* $Im(f)$
- *Determinare per quali valori di* $k \in \mathbb{R}$ *il vettore* $v = (1, k^2 - k, k) \in Im(f)$
- *Trovare un vettore di* $\mathbb{R}^3$ *privo di controimmagini mediante* f
- *Determinare* $\ker(f)$
- *Verificare che* $\ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$
- *Esistono dei vettori* $v \in \mathbb{R}^3$ *tali che* $f(v) = (3, 2, -2)$*?E tali che* $f(v) = (1, 2, -1)$*?*