

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2017-2018

Prova scritta del 17-7-2018

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + kX_3 - X_4 = 0 \\ kX_1 + 2X_2 + (2k-2)X_3 + (k-1)X_4 = -1-k \\ X_1 + X_3 - kX_4 = 1 \\ -X_1 + X_3 - X_4 = k \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

SOLUZIONE:

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti per poi applicare il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & -1 \\ k & 2 & 2k-2 & k-1 \\ 1 & 0 & 1 & -k \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\det(A) = -k^2 + 3k - 2 = 0 \text{ se e solo se } k = 1, 2.$$

Se $k \neq 1, 2$ si ha $r(A) = 4$ e quindi anche $r(A \ b) = 4$ ed il sistema è compatibile con un'unica soluzione, che possiamo calcolare con la regola di Cramer

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & k & -1 \\ -1-k & 2 & 2k-2 & k-1 \\ 1 & 0 & 1 & -k \\ k & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-k^2 + 3k - 2} = 0, \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & k & -1 \\ k & -1-k & 2k-2 & k-1 \\ 1 & 1 & 1 & -k \\ -1 & k & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-k^2 + 3k - 2} = -k^2 - k + 1,$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ k & 2 & -1-k & k-1 \\ 1 & 0 & 1 & -k \\ -1 & 0 & k & -1 \end{vmatrix}}{-k^2 + 3k - 2} = k + 1, \quad X_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ k & 2 & 2k-2 & -1-k \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k \end{vmatrix}}{-k^2 + 3k - 2} = 1.$$

Se $k = 1, 2$ consideriamo il minore di A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

e quindi $r(A) = 3$. Orlando questo minore in $(A \ b)$ si ottiene $\det(A) = 0$ e

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ k & 2 & 2k-2 & -1-k \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & k \end{vmatrix} = -k^2 + 3k - 2 = 0$$

da cui deduciamo che $r(A \ b) = 3$ e quindi che il sistema è compatibile anche nel caso $k = 1, 2$.

Quindi il sistema è compatibile per ogni k .

Nel caso $k = 1, 2$, dal minore che calcola il rango di A , sappiamo che possiamo ignorare la seconda riga, porre $X_4 = t$ e risolvere con la regola di Cramer, ottenendo

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} t & 1 & k \\ 1+kt & 0 & 1 \\ k+t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{kt - k - t + 1}{2}, \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & t & k \\ 1 & 1+kt & 1 \\ -1 & k+t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{k^2t + 2k^2 + 2kt - 3t + 1}{2},$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & 1+kt \\ -1 & 0 & k+t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{kt + k + t + 1}{2}. \blacksquare$$

2. Siano k un numero reale, $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X + Y - Z = 0 \\ Z + W = 0 \end{cases}$$

e $W_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X + kY - Z = 0 \\ kX + kW = 0 \end{cases}.$$

- (a) Determinare una base di U ed una di W_k .
- (b) Determinare le dimensioni di $W_k + U$ e di $W_k \cap U$.
- (c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $v \notin W_k + U$.

SOLUZIONE:

(a) La matrice di U è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e dato che $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, per calcolare la dimensione ed una base di U possiamo porre $X = s, Y = t$ da cui otteniamo $Z = s + t, W = -s - t$ e deduciamo che i vettori di U sono tutti del tipo

$$(s, t, s + t, -s - t) = s(1, 0, 1, -1) + t(0, 1, 1, -1).$$

Dunque $\{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, -1)\}$ è una base di U e $\dim U = 2$.

Per calcolare la dimensione di W_k calcoliamo il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 0 \end{vmatrix} = -k^2$ da cui otteniamo che $\dim W_k = r(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 2 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$.

Per la base di W_k risolviamo il sistema. Se $k = 0$, posto $Y = s, Z = t, W = u$ si ottiene $X = t$ e quindi i vettori di W_0 sono tutti del tipo

$$(t, s, t, u) = t(1, 0, 1, 0) + s(0, 1, 0, 0) + u(0, 0, 0, 1).$$

Dunque, se $k = 0$, $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ è una base di W_0 e $\dim W_0 = 3$.

Se $k \neq 0$, considerato il minore $\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 0 \end{vmatrix} = -k^2 \neq 0$, possiamo porre $Z = s, W = t$ ed ottenere $X = -t, Y = \frac{s+t}{k}$ e quindi i vettori di W_k sono tutti del tipo

$$(-t, \frac{s+t}{k}, s, t) = t(-1, \frac{1}{k}, 0, 1) + s(0, \frac{1}{k}, 1, 0)$$

Dunque, se $k \neq 0$, $\{(-1, \frac{1}{k}, 0, 1), (0, \frac{1}{k}, 1, 0)\}$ è una base di W_k e $\dim W_k = 2$.

(b) Se $k = 0$ i generatori di $W_0 + U$ danno la matrice

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

si ha $\dim(W_0 + U) = r(B_0) = 4$ e, per la formula di Grassmann,

$$\dim(W_0 \cap U) = \dim W_0 + \dim U - \dim(W_0 + U) = 1.$$

Se $k \neq 0$ i generatori di $W_k + U$ danno la matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{k} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{k} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che $\det(B_k) = 0$ e

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

si ha, se $k \neq 0$, $\dim(W_k + U) = r(B_k) = 3$ e, per la formula di Grassmann,

$$\dim(W_k \cap U) = \dim W_k + \dim U - \dim(W_k + U) = 1.$$

(c) Se $k = 0$ si ha $W_0 + U = \mathbb{R}^4$, quindi non esiste un $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $v \notin W_0 + U$.

Se $k \neq 0$ sappiamo da (b) che $W_k + U$ è generato dalle righe 2, 3 e 4 di B_k . Quindi $v = (a, b, c, d) \notin W_k + U$ se e solo se

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{k} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{k} & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

ovvero se e solo se

$$ka + kb - c + (k - 1)d \neq 0. \quad \blacksquare$$

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano r_k la retta passante per $Q(1, 1, 1, 0)$ e parallela a $v = e_1 + e_2 - ke_4$ e T_k il sottospazio con le seguenti equazioni:

$$T_k : \begin{cases} X - kY + W = 0 \\ X + Y + kZ = 0 \\ Z - W = k \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali T_k e $r_k \cap T_k$ sono sottospazi affini di A . Calcolare la dimensione di T_k .

(b) Determinare per quali valori di k , se esistono, r_k è parallela a T_k .

(c) Determinare (se esistono) per quali valori di k esiste un piano p in A tale che p è parallelo a T_k ed a r_k .

SOLUZIONE:

(a) Consideriamo la matrice del sistema che definisce T_k :

$$(B \ c) = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} -k & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = k^2 + 1 \neq 0$$

quindi $r(B) = r(B \ c) = 3$ per ogni k . Per il teorema di Kronecker-Rouché-Capelli, $T_k \neq \emptyset$ per ogni k , dunque T_k è un sottospazio per ogni k e $\dim T_k = \dim A - r(B) = 1$.

Come è noto l'intersezione di due sottospazi affini è un sottospazio affine se e solo se è non vuota. Dobbiamo quindi verificare se $r_k \cap T_k = \emptyset$. Per questo scriviamo le equazioni parametriche di r_k :

$$r_k : \begin{cases} X = 1 + t \\ Y = 1 + t \\ Z = 1 \\ W = -kt \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo nelle equazioni di T_k si ottiene

$$r_k \cap T_k : \begin{cases} 1 + t - k(1 + t) - kt = 0 \\ 2 + 2t + k = 0 \\ 1 + kt = k \end{cases}$$

da cui deduciamo

$$\begin{cases} t = -1 - \frac{k}{2} \\ k^2 + \frac{k}{2} = 0 \\ \frac{k^2}{2} + 2k - 1 = 0 \end{cases}$$

che si verifica subito essere incompatibile. Ne segue che $r_k \cap T_k = \emptyset$ per ogni k e quindi che $r_k \cap T_k$ non è mai un sottospazio affine di A .

(b) La giacitura di T_k è data dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\text{giac}(T_k) : \begin{cases} X - kY + W = 0 \\ X + Y + kZ = 0 \\ Z - W = 0 \end{cases}.$$

Considerato il minore

$$\begin{vmatrix} -k & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = k^2 + 1 \neq 0$$

possiamo porre $X = t$ e trovare che le soluzioni sono $X = t, Y = \frac{k-1}{k^2+1}t, Z = W = -\frac{k+1}{k^2+1}t$ e quindi

$$\text{giac}(T_k) = \langle e_1 + \frac{k-1}{k^2+1}e_2 - \frac{k+1}{k^2+1}e_3 - \frac{k+1}{k^2+1}e_4 \rangle = \langle (k^2+1)e_1 + (k-1)e_2 - (k+1)e_3 - (k+1)e_4 \rangle.$$

Ma

$$r\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -k \\ k^2+1 & k-1 & -k-1 & -k-1 \end{pmatrix}\right) = 2$$

dato che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k-1 & -1-k \end{vmatrix} = -1-k, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k^2+1 & k-1 \end{vmatrix} = k-2-k^2$$

non sono mai simultaneamente nulli. Pertanto r_k non è mai parallelo a T_k .

(c) Dato che r_k non è mai parallelo a T_k , per determinare p , basta prendere un qualsiasi punto $R \in A$ e prendere come giacitura la somma $\text{giac}(T_k) + \text{giac}(r_k)$ (che ha ovviamente dimensione 2). Si conclude che per ogni k esiste un piano p in A che è parallelo a T_k ed a r_k . ■

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $v = (0, 1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che v è autovettore di F con autovalore 2 ed inoltre

$$F(E_1 + E_2) = E_1 - v, F(E_1 - E_3) = (k-1)E_2 + kE_4, F(E_2 - E_4) = 2E_1 + (1+k)E_2 - 2E_3 + (1-k)E_4$$

dove E_1, E_2, E_3, E_4 è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F .

(b) Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ .

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che $v, E_1 + E_2, E_1 - E_3, E_2 - E_4$ sono linearmente indipendenti, e dunque una base e di $\mathbb{R}^4$, in quanto

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Per determinare la matrice associata ad F osserviamo intanto che, per ipotesi, $F(v) = 2v$ è già espresso nella base e . Si ha inoltre

$$av + b(E_1 + E_2) + c(E_1 - E_3) + d(E_2 - E_4) = (b+c)E_1 + (a+b+d)E_2 - cE_3 + (a-d)E_4 =$$

$$= E_1 - v = E_1 - E_2 - E_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ a + b + d = -1 \\ -c = 0 \\ a - d = -1 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = -\frac{3}{2}, b = 1, c = 0, d = -\frac{1}{2}$. Pertanto

$$F(E_1 + E_2) = -\frac{3}{2}v + 1(E_1 + E_2) + 0(E_1 - E_3) - \frac{1}{2}(E_2 - E_4).$$

Analogamente

$$av + b(E_1 + E_2) + c(E_1 - E_3) + d(E_2 - E_4) = (b + c)E_1 + (a + b + d)E_2 - cE_3 + (a - d)E_4 = (k - 1)E_2 + kE_4$$

se e solo se

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a + b + d = k - 1 \\ -c = 0 \\ a - d = k \end{cases}$$

che ha soluzione $a = k - \frac{1}{2}, b = 0, c = 0, d = -\frac{1}{2}$. Pertanto

$$F(E_1 - E_3) = (k - \frac{1}{2})v + 0(E_1 + E_2) + 0(E_1 - E_3) - \frac{1}{2}(E_2 - E_4).$$

Inoltre

$$\begin{aligned} av + b(E_1 + E_2) + c(E_1 - E_3) + d(E_2 - E_4) &= (b + c)E_1 + (a + b + d)E_2 - cE_3 + (a - d)E_4 = \\ &= 2E_1 + (1 + k)E_2 - 2E_3 + (1 - k)E_4 \end{aligned}$$

se e solo se

$$\begin{cases} b + c = 2 \\ a + b + d = 1 + k \\ -c = -2 \\ a - d = 1 - k \end{cases}$$

che ha soluzione $a = 1, b = 0, c = 2, d = k$. Pertanto

$$F(E_2 - E_4) = 1v + 0(E_1 + E_2) + 2(E_1 - E_3) + k(E_2 - E_4).$$

Ne segue che

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & k - \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & k \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} 2-T & -\frac{3}{2} & k-\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1-T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & k-T \end{vmatrix} = (T-1)(T-2)(T^2 - kT + 1).$$

Quindi gli autovalori di F sono 1, 2 e $\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ quando $k^2 - 4 \geq 0$, ovvero quando $k \leq -2$ o $k \geq 2$.

Vediamo se ci possono essere coincidenze: si verifica subito che

$$\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2} = 1 \text{ se e solo se } k = 2, \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2} = 2 \text{ se e solo se } k = \frac{5}{2}$$

quindi

Autovalori di F e loro molteplicità algebrica (m.a.)

$-2 < k < 2$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 1)
$k = -2$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 1), $\lambda_3 = -1$ (m.a. 2)
$k < -2$ o $k > 2, k \neq \frac{5}{2}$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 1), $\lambda_3 = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ (m.a. 1), $\lambda_4 = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ (m.a. 1)
$k = 2$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 3), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 1)
$k = \frac{5}{2}$	$\lambda_1 = 1$ (m.a. 1), $\lambda_2 = 2$ (m.a. 2), $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ (m.a. 1)

(b) Consideriamo l'autovalore $\lambda_3 = -1$ nel caso $k = -2$ e calcoliamo la base di $V_{-1}(F)$.

Come sappiamo tutti gli autovettori di F con autovalore -1 sono soluzioni del sistema

$(M_e(F) - (-1)I_4)X = 0$ dove $X = {}^t(x, y, z, w)$. Si ottiene

$$\begin{cases} 3x - \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z + w = 0 \\ 2y = 0 \\ z + 2w = 0 \\ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - w = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni $x = -2t, y = 0, z = -2t, w = t$. Quindi gli autovettori di F associati all'autovalore -1 sono tutti del tipo

$$-2tv - 2t(E_1 - E_3) + t(E_2 - E_4) = t(-2v - 2(E_1 - E_3) + (E_2 - E_4)) = t(-2E_1 - E_2 + 2E_3 - 3E_4).$$

Ne segue che una base di $V_{-1}(F)$ è $\{-2E_1 - E_2 + 2E_3 - 3E_4\}$ e pertanto $\dim V_{-1}(F) = 1$.

(c) Se $k = 2$ si ha

$$m.g.(1) = 4 - r\left(\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 < m.a.(1) = 3$$

Se $k = \frac{5}{2}$ si ha

$$m.g.(2) = 4 - r\left(\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = 1 < m.a.(2) = 2.$$

Dato che, per la (b), si ha che se $k = -2$ allora $m.g.(-1) = 1 < m.a.(-1) = 2$ e che nel caso $-2 < k < 2$ la somma delle molteplicità geometriche è $2 < 4$, mentre nel caso $k < -2$ o $k > 2, k \neq \frac{5}{2}$ ci sono 4 autovalori distinti, si deduce che F è diagonalizzabile se e solo se $k < -2$ o $k > 2, k \neq \frac{5}{2}$ ■