UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE110 - Geometria 1

a.a. 2017-2018

Prova scritta del 17-7-2018

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Per $k \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + kX_3 - X_4 = 0 \\ kX_1 + 2X_2 + (2k-2)X_3 + (k-1)X_4 = -1-k \\ X_1 + X_3 - kX_4 = 1 \\ -X_1 + X_3 - X_4 = k \end{cases}$$

Determinare i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, calcolare esplicitamente le soluzioni.

2. Siano k un numero reale, $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X + Y - Z = 0 \\ Z + W = 0 \end{cases}$$

e $W_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} X + kY - Z = 0 \\ kX + kW = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare una base di U ed una di W_k.

(b) Determinare le dimensioni di $W_k + U$ e di $W_k \cap U$.

(c) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $v \notin W_k + U$.

3. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine A di dimensione 4 sia O, e_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano r_k la retta passante per $Q(1,1,1,0)$ e parallela a $v = e_1 + e_2 - ke_4$ e T_k il sottospazio con le seguenti equazioni:

$$T_k : \begin{cases} X - kY + W = 0 \\ X + Y + kZ = 0 \\ Z - W = k \end{cases}.$$

(a) Determinare i valori di k per i quali T_k e $r_k \cap T_k$ sono sottospazi affini di A. Calcolare la dimensione di T_k.

(b) Determinare per quali valori di k, se esistono, r_k è parallela a T_k.

(c) Determinare (se esistono) per quali valori di k esiste un piano p in A tale che p è parallelo a T_k ed a r_k.

4. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $v = (0, 1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che v è autovettore di F con autovalore 2 ed inoltre

$$F(E_1+E_2) = E_1-v, F(E_1-E_3) = (k-1)E_2+kE_4, F(E_2-E_4) = 2E_1+(1+k)E_2-2E_3+(1-k)E_4$$

dove E_1, E_2, E_3, E_4 è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di F.

(b) Scelto un autovalore λ di F con molteplicità algebrica $\neq 1$, trovare una base per l'autospazio di F associato a λ.

(c) Determinare i valori di k per i quali F è diagonalizzabile.